голоморфности, если существует ф-ция, голоморфная в D и аналитически непродолжимая ни в какую другую бо́льшую область (в т. ч. и неоднолистную). Свойство области быть областью голоморфности есть локальное свойство её границы, обобщающее понятие выпуклости. Если D не является областью голоморфности, то все ф-ции, голоморфные в D, одновременно продолжаются в нек-рую бо́льшую область. Вопрос об отыскании такой наибольшей области (оболочки голоморфности), как и в случае аналитич. продолжения заданной функции, приводит к многолистным областям наложения над $\mathbb{C}^n$ (многообразиям Штейна).

Др. пример неожиданного «принудительного» продолжения многомерных А. ф. даёт теорема об острие клина (получена Н. Н. Боголюбовым в 1956), играющая важную роль в теории дисперсионных соотношений и аксиоматич. квантовой теории поля. По этой теореме две ф-ции, аналитические каждая в своей спец. вида трубчатой области и совпадающие на n-мерном чисто вещественном открытом множестве соприкосновения этих областей (т. е. на множестве вдвое меньшей размерности), аналитически продолжаются в комплексную окрестность G этого множества и представляют собой единую А. ф. Вид области G можно найти с помощью теоремы о $\mathbb{C}$-выпуклой оболочке (получена В. С. Владимировым в 1964).

Лит.: Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 13 изд., М., 1984; Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, М., 1976.

Б. И. Завьялов.

АНАЛИТИ́ЧЕСКИЙ СИГНА́Л — одно из возможных комплексных представлений $w(t)$ сигнала (колебания), описываемого действит. ф-цией $u(t)$; является естеств. обобщением представления, используемого для монохроматич. сигналов. Напр., если сигнал $u(t)$ представлен в виде интеграла Фурье $u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\varphi(\omega)\times$ $\times\exp(\pm i\omega t)$, причём $\varphi(-\omega)=\varphi^*(\omega)$ (где знак $*$ означает комплексное сопряжение), то

$$w(t)=u(t)+iv(t)=2\int_0^{\infty} d\omega\varphi(\omega)\exp(\pm i\omega t). \qquad (1)$$

Ф-ла (1) позволяет получить аналитич. продолжение ф-ции $u(t)$ в верхнюю (нижнюю) полуплоскость комплексной переменной t, с чем и связано назв. А. с. Понятие А. с. введено Д. Габором (D. Gabor), в 1946, оно широко используется в теории колебаний и волн, волновой и квантовой оптике, теории связи и др.

Введённые таким способом ф-ции $u(t)$ и $v(t)$ связаны между собой *Гильберта преобразованиями* (или *дисперсионными соотношениями*):

$$\begin{Bmatrix} v(t) \\ -u(t) \end{Bmatrix} = \mp P\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau-t}\begin{Bmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{Bmatrix} =$$

$$= \mp\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\begin{Bmatrix} u(t+\tau)-u(t-\tau) \\ v(t+\tau)-v(t-\tau) \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

(здесь P — символ *главного значения интеграла*). Отсюда следует, что для нахождения $v(t)$ нужно знать не только предшествующие, но и последующие по времени значения $u(\tau)$. Соотношения (2) можно рассматривать как определение А. с. $w(t)=u(t)+iv(t)$. Каждому способу введения w, одним из к-рых является А. с., соответствует свой способ определения (и измерения) амплитуды $A=|w|$, фазы $S=\mathrm{Arg}\,w$ и угловой частоты $\omega=$ $=dS/dt$ сигнала $u(t)$. Если спектр сигнала сосредоточен в относительно узком интервале частот (квазимонохроматич. сигнал), то амплитуда и фаза мало меняются за время, соответствующее периоду осн. частоты. Для комплексного представления, построенного при помощи А. с., величина такого изменения амплитуды и фазы при определ. условиях оказывается минимальной. Естеств. образом появляется А. с. в квантовой оптике, что выделяет его среди др. комплексных представлений.

Лит.: Gabor D., Theory of communications, «J. IEE», L., 1946, v. 93, pt 3, p. 429; Борн М., Вольф Э., Основы оптики, 2 изд., пер. с англ., М., 1973, § 10.2; Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, пер. с англ., М., 1970; Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А., Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний, «УФН», 1977, т. 123, в. 4.

В. И. Татарский.

АНАЛИТИ́ЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕ́НИЕ — расширение области определения аналитич. ф-ции с сохранением её аналитичности. А. п. — осн. метод доказательства *дисперсионных соотношений*; используется в *аксиоматической квантовой теории поля* и др. областях физики.

Пусть аналитич. ф-ция определена степенным рядом в точке z_0 и тем самым задана первоначально в нек-ром круге. Если разложить ф-цию в ряд в окрестности др. точки z_1, то круг сходимости нового ряда может оказаться частично за пределами исходного круга. Тогда эти два ряда определяют единую ф-цию, аналитическую в объединении двух кругов, т. е. в области большей, чем первоначальная. А. п. можно строить, повторяя этот процесс, каждый раз расширяя область аналитичности ф-ции. Не исключено, однако, что на к.-л. этапе мы вновь вернёмся к точкам, где ф-ция уже была определена ранее, напр. к точкам исходного круга. Совпадения в этой области исходной ф-ции с ф-цией, полученной в результате такого А. п., может и не быть. Т. о. возникают многозначные аналитич. ф-ции, к-рые приводят к понятиям многолистных областей, *римановых поверхностей* и др.

Пусть D_1 и D_2 — области расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (см. *Аналитическая функция*), а f_1 и f_2 — ф-ции, аналитические соответственно в D_1 и D_2. Если f_1 и f_2 совпадают в связной части Δ пересечения областей D_1 и D_2, то говорят, что пары (D_1, f_1) и (D_2, f_2) являются непосредственным А. п. друг друга через область Δ. При этом ф-ция f_2 однозначно определяется ф-цией f_1, и наоборот. Ф-ции f_1 и f_2 не обязаны совпадать в др. связных частях пересечения D_1 и D_2. Если в к.-л. части такого совпадения нет, то её удобно «расщепить» на два листа, задавая на одном из них ф-цию, равную f_1, на другом — f_2. Так появляется простейшая неоднолистная область и однозначная аналитич. ф-ция в ней (но неоднозначная в объединении D_1 и D_2).

Критерий однозначности А. п. даёт теорема о монодромии. Пусть ф-ция $f(z)$ задана и аналитична в нек-рой окрестности точки z_0, принадлежащей односвязной области D. Если $f(z)$ аналитически продолжается вдоль любого пути, выходящего из z_0 и лежащего в D, то в результате А. п. получается однозначная аналитич. ф-ция. Две пары (D, f) и (G, g), где D, G — области расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а f, g — ф-ции, аналитические соответственно в D и G, наз. А. п. друг друга, если их можно «соединить» конечным числом пар (D_i, f_i), $i=1, \ldots, n$, $(D_1, f_1)=(D, f)$, $(D_n, f_n)=(G, g)$, таких, что каждая последующая пара является непосредственным А. п. предыдущей. Макс. совокупность пар, каждая из к-рых является А. п. любой другой, задаёт ф-цию, аналитическую (и однозначную) на соответствующей римановой поверхности.

Пример. Пусть $f(z)$ обладает в плоскости $\mathbb{C}$ единственной особой точкой $z_0=0$, являющейся точкой ветвления n-го порядка $\left(\text{напр., } f(z)=\sqrt[n]{z}\right)$. Её риманова поверхность представляет собой n экземпляров плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль вещественной положит. полуоси (листов) D_i, $i=1, \ldots, n$. При этом точки верх. берега каждого последующего листа отождествляются с соответствующими точками ниж. берега предыдущего листа. Точки ниж. берега первого листа отождествляются с соответствующими точками верх. берега n-го листа. Т. о., каждый полный обход вокруг начала координат переводит точку на след. лист. При n-кратном обходе она возвращается на первонач. лист.

Эфф. инструментом А. п. служит т. н. принцип симметрии. Пусть ф-ция $f(z)$ аналитична в области D, содержащей на своей границе отрезок веществ.