весия — седло S и центры C_1 и C_2 (рис. 5, *б*). При этом возможно существование устойчивых несимметрич. движений в полностью симметрич. системе.

За локальными Б. можно проследить, наблюдая развитие малых возмущений в системе, к-рые описываются линеаризованными ур-ниями. В динамич. системе

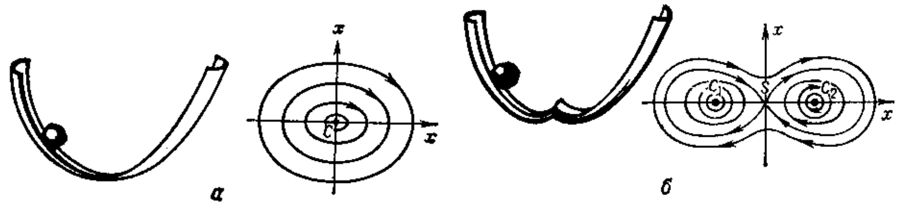

Рис. 5. Рождение из одного состояния равновесия трёх при малом изменении параметра (формы жёлоба): *а* — форма жёлоба и соответствующий фазовый портрет с одним состоянием равновесия типа центр; *б* — форма жёлоба с двумя минимумами и соответствующий фазовый портрет с тремя состояниями равновесия: седло S и два центра C_1 и C_2.

$\dot{x}=X(x, \mu)$ [x — вектор физ. переменных, μ — параметр, а $x(\mu)$ — состояние равновесия] малые возмущения ξ описываются ур-нием $\dot{\xi}=A(\mu)\xi$, где $A(\mu)\equiv\equiv\partial X[x_0(\mu), \mu]/\partial x$. Если корни λ_n характеристич. ур-ния $\det[A(\mu)-\lambda E]=0$ (где E — единичная матрица) не лежат на мнимой оси комплексной плоскости (рис. 6), то в окрестности состояния равновесия при малых сдвигах параметров Б. не происходит. Она осуществляется, лишь когда при μ, равном критич. значению μ^*, один или неск. корней попадает на мнимую ось комплексной плоскости. Всем Б. исчезновения или рождения состояний равновесия соответствует прохождение одного или неск. корней через ноль. Одна из подобных возможностей представлена на рис. 7, где изображено рождение состояний равновесия типа седла S и узла N. Такая Б. встречается, напр., в задаче о конкуренции

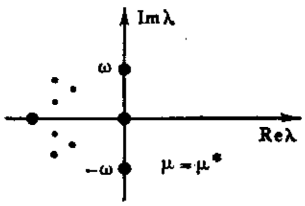

Рис. 6. Комплексная плоскость с изображением λ_n (точки).

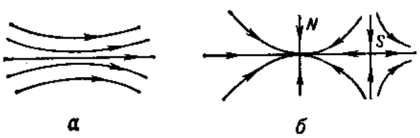

Рис. 7. Рождение двух состояний равновесия — седла S и узла N: *а* — фазовый портрет до бифуркации; *б* — фазовый портрет после бифуркации.

видов с численностями x_1, x_2, питающимися из одного источника (рис. 8). Соответствующие кинетич. ур-ния, описывающие изменения численностей,— это:

$$\dot{x}_{1,2}=[1-(x_{2,1}+\rho_{1,2}\,x_{1,2})].$$

При ρ_1, $\rho_2>1$ в системе возможна «победа» в борьбе за существование любого из видов. При уменьшении же одного из параметров ρ_1, ρ_2 до значения, меньшего 1, при произвольных нач. условиях будет выживать лишь вполне определ. вид (рис. 8, *б*). Аналогич. ур-ниями описывается конкуренция типов колебаний (мод) в лазерах, структур разных типов, возникающих в жидкости при тепловой конвекции, и т. д.

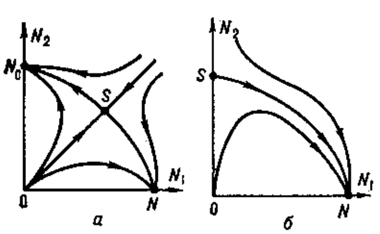

Рис. 8. Фазовые портреты кинетических уравнений: *а* — при $\rho_1<1$, $\rho_2>1$; *б* — при ρ_1, $\rho_2>1$.

Когда два корня характеристич. ур-ния становятся чисто мнимыми, тогда из состояния равновесия рождается или в нём умирает предельный цикл (табл. 1, строка 4). Это означает, что для всех значений параметра μ, меньших (больших) критического μ^* и достаточно близких к нему, существует периодич. решение, к-рое при $\mu\to\mu^*$ стремится к статическому $x_0(\mu)$. Устойчивость предельного цикла определяется устойчивостью состояния равновесия при $\mu=\mu^*$. Эту Б. наз. Б. Андронова — Хопфа.

Бифуркации рождения периодич. движения. В табл. 1 приведены основные Б. рождения (если фазовые портреты просматривать слева направо) или исчезновения (если справа налево) периодич. движений. Они разбиты на 3 группы. Если говорить об исчезновении периодич. движений, то к 1-й группе (первые 2 строки) относятся такие Б., при к-рых период периодич. движения $T\to\infty$ (или частота $\omega\to 0$) при $\mu-\mu^*\to 0$, а амплитуда колебаний около ср. значения к нулю не стремится. В автоколебат. системах примером такой Б. является возникновение модуляции при действии периодич. силы на автогенератор. Предельный цикл — образ модулир. колебаний — при этом рождается из петли сепаратрисы седло — узел при слиянии и исчезновении двух состояний равновесия: седла и узла (табл. 1, строка 1). Знание подобной Б. позволяет определить свойства нового режима, возникшего после перехода через критич. точку,— возникшая модуляция будет характеризоваться конечной амплитудой и близкой к нулю частотой модуляции.

Ко 2-й группе относится Б. исчезновения устойчивого периодич. движения в момент его слияния с неустойчивым периодич. движением (табл. 1, строка 3) — т. н. касательная Б. Такая Б. для автогенератора с жёстким возбуждением изображена на рис. 9 с помощью графика отображения Пуанкаре (см. *Динамическая система*). Рис. 9, *а* соответствует состоянию системы, в к-ром устойчивые колебания отсутствуют — предельных циклов нет. Рис. 9, *б* соответствует моменту Б.: график функциональной зависимости x_{n+1} от x_n касается биссектрисы первого квадранта — происходит рождение двух периодич. движений — устойчивого *1* и неустойчивого *2* (рис. 9, *в*).

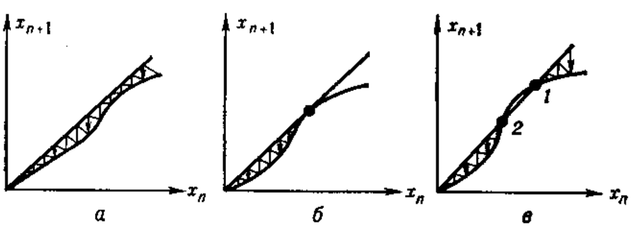

Рис. 9. График отображения Пуанкаре секущей $x=0$ для автогенератора с жёстким возбуждением: *а* — устойчивые колебания отсутствуют — предельных циклов нет; *б* — момент бифуркации — график функции касается биссектрисы; *в* — устойчивое *1* и неустойчивое *2* движения.

Б. 3-й группы встречаются, как правило, в системах, зависящих от двух и более параметров (табл. 1, строка 5).

Бифуркации смены устойчивости периодич. движений. Важной характеристикой Б. смены устойчивости периодич. движений (табл. 2) являются значения мультипликаторов в критич. момент, к-рые представляют собой коэф. усиления (затухания) малых возмущений на фоне рассматривае-