может быть задано набором чисел (N_1, N_2, ...), указывающим, что N_1 частиц находится в состоянии ψ_1, N_2 частиц — в состоянии ψ_2 и т. д. Вектор состояния системы в этом случае обозначают $|N_1, N_2, \ldots\rangle$. О таком описании системы говорят как об описании в пространстве чисел заполнения или в представлении вторичного квантования.

Для ферми-системы в каждом состоянии может находиться не более одной частицы, $N_i=0,1$. Для бозе-систем N_i может быть любым неотрицат. целым числом, $N_i=0,1, \ldots, N$. В пространстве чисел заполнения можно рассматривать системы с произвольным числом частиц. Оператор a_i^+, переводящий состояние системы $|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle$ в состояние, у к-рого на i-уровне находится N_i+1 частиц,

$$a_i^+ |N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = \sqrt{N_i+1}\,|N_1, \ldots, N_i+1, \ldots\rangle, \quad (1)$$

наз. оператором рождения. Оператор, a_i^-, к-рый удаляет частицу с i-уровня,

$$a_i^- |N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = \sqrt{N_i}\,|N_1, \ldots, N_i-1, \ldots\rangle, \quad (2)$$

наз. оператором уничтожения. Коэф. $\sqrt{N_i+1}$ и $\sqrt{N_i}$ в (1) и (2) определяются из условия того, что оператор $a_i^+a_i^-$ является оператором числа частиц в состоянии i, т. е.

$$a_i^+a_i^- |N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = N_i\,|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle.$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют *перестановочным соотношениям*

$$[a_i^+, a_j^+]=0,\ [a_i^-, a_j^-]=0,\ [a_i^-, a_j^+]=\delta_{ij} \quad (3а)$$

для статистики Бозе — Эйнштейна (квадратные скобки, как обычно, означают коммутатор, т. е. $[b, c]=bc-cb$) и

$$\{a_i^+, a_j^+\}=0,\ \{a_i^-, a_j^-\}=0,\ \{a_i^+, a_j^-\}=\delta_{ij} \quad (3б)$$

для статистики Ферми — Дирака (фигурные скобки означают антикоммутатор, т. е. $\{b,c\}=bc+cb$; δ_{ij} — *Кронекера символ*). Пространство чисел заполнения для бесконечного числа частиц наз. пространством Фока.

Любые квантовомеханич. операторы, заданные, напр., в *конфигурационном представлении*, можно записать при помощи операторов рождения и уничтожения в представлении В. к. Напр., *гамильтониан*

$$H=\sum_f H_f^{(1)}+\sum_{f,\ g} U^{(2)}(x_f,\ x_g),$$

где $H_f^{(1)}=-(\hbar^2/2m)\Delta_f+U^{(1)}(x_f)$ — одночастичный гамильтониан, $U^{(2)}(x_f, x_g)$ — потенциал двухчастичного взаимодействия, в представлении В. к. записывается в виде:

$$H=\sum_{i,\ k} H_{ik}^{(1)}\,a_i^+a_k^- + \frac{1}{2}\sum_{i,\ k,\ l,\ m} U_{ik,\ lm}^{(2)}\,a_i^+a_k^+a_l^-a_m^-,$$

где

$$H_{ik}^{(1)}=\int \psi_i^*(x)\,H^{(1)}\,\psi_k(x)\,dx,$$

$$U_{ik,\ lm}^{(2)}=\int \psi_i^*(x)\,\psi_k^*(x')\,U^2(x, x')\,\psi_l(x)\,\psi_m(x)\,dx\,dx',$$

a_i^+, a_i^- — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии ψ_i одночастичного гамильтониана (без учёта взаимодействия между частицами).

Гамильтониан в представлении В. к. может быть записан в более компактной форме, если ввести операторы $\hat\psi$ и $\hat\psi^+$,

$$\hat\psi=\sum_i a_i^-\psi_i,\quad \hat\psi^+=\sum_i a_i^+\psi_i^*,$$

действующие на векторы состояния $|N_1, N_2, \ldots\rangle$ в пространстве чисел заполнения:

$$H=\int \hat\psi^+(x)\,H^{(1)}\hat\psi(x)\,dx+\frac{1}{2}\int \hat\psi^+(x)\hat\psi^+(x')\times U^{(2)}\hat\psi(x)\hat\psi(x')\,dx\,dx'.$$

Выражения для операторов $\hat\psi$ аналогичны разложению произвольной волновой ф-ции по полной системе волновых ф-ций ψ_i. Поскольку, однако, коэффициенты разложения являются не числами, а операторами, $\hat\psi$ и $\hat\psi^+$ наз. вторично квантованными (отсюда назв. метода — «В. к.»).

Достоинство метода В. к. в применении к системам взаимодействующих частиц состоит в том, что с его помощью естеств. образом описываются переходы между состояниями системы, вызванные взаимодействием частиц. Эти переходы сводятся к исчезновению частиц в одном состоянии и появлению их в другом. Одновременно аппарат В. к. приспособлен и к рассмотрению процессов с перем. числом частиц — описывает рождение или уничтожение частиц в результате взаимодействия. В квантовой механике всякое слабо возбуждённое состояние системы взаимодействующих частиц может быть представлено как совокупность элементарных возбуждений — *квазичастиц*. Числа N_i в представлении чисел заполнения в этом случае интерпретируются как числа квазичастиц. Напр., слабо возбуждённое состояние твёрдого тела, обусловленное колебаниями атомов кристаллич. решётки, описывается как совокупность квазичастиц — *фононов*, свободно движущихся в объёме тела. При этом энергию возбуждения системы можно рассматривать как энергию идеального газа фононов. Осн. состояние системы, в к-ром отсутствуют квазичастицы, можно рассматривать как вакуум, вектор состояния к-рого удовлетворяет условию $a_i^-|0\rangle=0$. Для слабо взаимодействующего неидеального бозе-газа операторы рождения и уничтожения квазичастиц связаны с операторами рождения и уничтожения исходных частиц *Боголюбова каноническими преобразованиями*.

Квантование системы гармонических осцилляторов. Рассмотрим важный частный случай — систему n квантовых невзаимодействующих гармонич. *осцилляторов* (единичной массы) с гамильтонианом

$$H=\sum_{i=1}^{n} H_i(\hat p_i,\ \hat q_i),\quad H_i(\hat p_i,\ \hat q_i)=\frac{1}{2}(\hat p_i^2+\omega_i^2\hat q_i^2).$$

Здесь $\hat q_i$, $\hat p_i$ — операторы обобщённых координаты и импульса i-осциллятора, а параметры ω_i имеют смысл частоты колебаний. Для перехода в представление В. к. вводятся операторы уничтожения и рождения

$$a_i^-=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_i}}(\omega_i\hat q_i+i\hat p_i),$$

$$a_i^+=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_i}}(\omega_i\hat q_i-i\hat p_i).$$

Тогда гамильтониан принимает вид

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\hbar\omega_i}{2}(a_i^+a_i^-+a_i^-a_i^+). \quad (4)$$

Операторы $a_i^\pm$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3а). Обозначим через ψ_{0i} решение ур-ния $a_i^-\psi_{0i}=0$; оно интерпретируется как вакуумное состояние i-осциллятора. Введём вакуумное состояние системы n осцилляторов: $|0\rangle=\prod_{i=1}^{n}\psi_{0i}$. Состояние

$$|K_1, \ldots, K_n\rangle=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{K_i!}}(a_i^+)^{K_i}|0\rangle \quad (5)$$