Для теорий с высшими производными, когда $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(n)})$, переход от лагранжева к Г. ф. осуществляется введением новых координат $Q_k = q^{(k-1)}$, $k = 1, \ldots, n$, и связей $\dot{Q}_{k-1} - Q_k = 0$:

$$L \longrightarrow L_T = L(Q_1, \ldots, Q_n, \dot{Q}_n) + \sum_{k=2}^{n} \xi_k (\dot{Q}_{k-1} - Q_k).$$

При этом возникают $2(n-1)$ гамильтоновых связей II рода: $P_k - \xi_k = 0$, $\pi_k \equiv \partial L_T / \partial \dot{\xi}_k = 0$. Для ф-ций переменных P, Q скобка Дирака совпадает со скобкой Пуассона, а H^* имеет вид

$$H^* = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \ldots + P_{n-1} Q_n + P_n \dot{Q}_n - L(Q_1, \ldots, Q_n, \dot{Q}_n).$$

При $k<n$ ур-ния Гамильтона для Q_k эквивалентны лагранжевым связям, а для P_k — иному определению импульсов:

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial Q_{k+1}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial Q_{k+2}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial Q_{k+3}} - \ldots.$$

В релятивистской теории осн. проблемой Г. ф. является удовлетворение требованиям релятивистской инвариантности. Как и в лагранжевом формализме, здесь требование инвариантности действия относительно преобразований симметрии позволяет с помощью *Нётер теоремы* построить соответствующие сохраняющиеся величины как явные ф-ции канонич. переменных $\varphi(x)$ и $\pi(x)$. В частности, инвариантность действия относительно преобразований из группы Пуанкаре приводит к сохранению четырёх компонент энергии-импульса P_μ и шести компонент момента $M_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), где, напр., $P_0 = H$, $P_i = \int dx \pi(x) \partial_i \varphi(x)$, $i = 1, 2, 3$. Эти величины являются генераторами трансляций и вращений в четырёхмерном пространстве-времени, реализованными как генераторы соответствующих канонич. преобразований в фазовом пространстве системы. Напр., для любой ф-ции $\psi = \psi[\varphi(x), \pi(x)]$ имеем

$$\{H, \psi\} = \partial_0 \psi, \quad \{P_i, \psi\} = \partial_i \psi$$

(где $\partial_\mu \equiv \partial / \partial x_\mu$).

Непосредств. проверка инвариантности действия в Г. ф. затруднительна ввиду явной нековариантности определений π и H. Однако, поскольку преобразования Пуанкаре образуют группу Ли (см. *Группа*), генераторы должны удовлетворять соотношениям её алгебры:

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0, \; \{P_\mu, M_{\nu\varkappa}\} = g_{\varkappa\mu} P_\nu - g_{\nu\mu} P_\varkappa,$$
$$\{M_{\mu\nu}, M_{\varkappa\chi}\} = g_{\mu\varkappa} M_{\nu\chi} + g_{\nu\varkappa} M_{\mu\varkappa} - g_{\mu\varkappa} M_{\nu\varkappa} - g_{\nu\varkappa} M_{\mu\varkappa}$$

($g_{\mu\nu}$ — метрич. тензор), представляющим собой условие релятивистской ковариантности Г. ф. Часть этих соотношений удовлетворяется автоматически, а остальные налагают существ. ограничения на вид H и др. генераторов группы Пуанкаре.

Г. ф. играет принципиальную роль в процедуре квантования, стандартным рецептом к-рой является замена скобок Пуассона $\{f, g\}$ коммутатором $(i/\hbar) \times [\hat{f}, \hat{g}]$ операторов, отвечающих наблюдаемым f и g. При этом приходится решать две проблемы. Первая состоит в выборе порядка операторов $\hat{p}$, $\hat{q}$, отвечающих канонич. переменным, в выражениях $\hat{f} = \hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$. Квантовый аналог классич. системы уже поэтому неоднозначен. Вторая связана с выбором канонических переменных, для к-рых постулируются канонич. *перестановочные соотношения* $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}$. В классической теории равноправны любые наборы (p, q), связанные каноническим преобразованием. В квантовой теории разные выборы канонически квантуемых переменных приводят, вообще говоря, к разным результатам. Иногда критерии выбора существуют. Например, для системы, прообразом которой служит система материальных точек, преимущественными являются декартовы координаты и соответствующие импульсы. Для полевых систем «неправильный» выбор может привести к противоречиям.

Совершенно разный смысл приобретают при квантовании связи I и II рода. Связи II рода налагаются как соотношения для отвечающих им операторов, а связи I рода могут налагаться только как дополнит. условия на *векторы состояния*, выделяющие физ. подпространство таких векторов.

Лит.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; их же, Механика, 3 изд., М., 1973; Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; Фаддеев Л. Д., Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов, «ТМФ», 1969, т. 1, с. 3; Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; Медведев Б. В., Начала теоретической физики, М., 1977; Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М., 1978; Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, М., 1980.

Б. В. Медведев, В. П. Павлов.

ГАМИЛЬТО́НОВА СИСТЕ́МА — частный случай *динамической системы*, описывающей физ. процессы без диссипации; соответствующие дифференц. ур-ния можно представить в след. симметричной форме (*Гамильтона уравнения*):

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; i = 1, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $H(p, q, t)$, наз. *Гамильтона функцией*, имеет обычно смысл энергии системы, а q_i и p_i — обобщённые координаты и импульсы, n — число степеней свободы системы. Ниже рассматриваются автономные Г. с., в к-рых ф-ция H не зависит явно от времени t. В каждой точке (p, q) *фазового пространства* вектор $(-\partial H/\partial q_i, \partial H/\partial p_i)$ задаёт поле фазовой скорости, касательное к фазовым траекториям. Возникает наглядный образ движения Г. с. как фазового потока. Фазовый поток сохраняет элемент объёма в фазовом пространстве, т. е. при движении по траекториям системы (*) фазовый объём не меняется (*Лиувилля теорема*). Отсюда следует, что Г. с. в фазовом пространстве не может иметь множеств, к к-рым все траектории из целой области притягиваются асимптотически. Более того, почти все траектории, совершающие финитное движение, являются неблуждающими, т. е. почти всякая движущаяся точка многократно возвращается в окрестность своего исходного положения (*Пуанкаре теорема* о возвращении).

Производная ф-ции $F(p, q)$ по направлению вектора фазовой скорости в данной точке (p, q) определяет изменение F вдоль траектории и равна $\dot{F} = -\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = \{F, H\}$, где $\{F, H\}$ наз. скобкой Пуассона ф-ций F и H. Если $\dot{F} = 0$, т. е. $\{F, H\} = 0$, то F не меняется вдоль траекторий и является первым интегралом (интегралом движения) системы (*). В частности, интегралом системы (*) является ф-ция H, поэтому фазовое пространство Г. с. расслаивается на гиперповерхности $H = h = \text{const}$; траектория, начинающаяся на данной гиперповерхности, никогда её не покидает. Дополнит. интегралы Г. с. часто получаются как следствие инвариантности H относительно нек-рой группы преобразований (см. *Нётер теорема*). Напр., пусть ф-ция H инвариантна относительно сдвигов s вдоль оси q_1, т. е.

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1 + s, q_2, \ldots, q_n) = H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$$

для любого s. Тогда H не зависит от q_1, поэтому $\dot{p}_1 = -\partial H / \partial q_1 = 0$ и $F(p, q) = p_1$ — интеграл движения; координата q_1 наз. в этом случае циклической.

Интегрируемые системы являются простейшим типом Г. с. Они имеют, кроме ф-ции $H = H_1$, ещё $n-1$ интегралов $H_2, \ldots, H_n$, причём попарные скобки Пуас-