Наиб. общая формулировка Г. п. даётся на языке *обобщённых функций*. Для преобразований Фурье $\tilde{f}(\lambda) = \int dx f(x) \exp(i\lambda x)$, $\tilde{g}(\lambda) = \int dx g(x) \exp(i\lambda x)$ от ф-ций $f(x)$, $g(x)$ Г. п. переходит в оператор умножения: $\tilde{g}(\lambda) = i \operatorname{sign}(\lambda) \tilde{f}(\lambda)$. Существует обратное преобразование, к-рое вместе с прямым образует пару Г. п.

$$\left\{\begin{matrix} g(x) \\ f(x) \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x-y} \left\{\begin{matrix} f(y) \\ g(y) \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

эквивалентную ф-лам

$$\left\{\begin{matrix} g(x) \\ f(x) \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{t} \left\{\begin{matrix} f(x+t)-f(x-t) \\ g(x+t)-g(x-t) \end{matrix}\right\}. \qquad (2)$$

Г. п. рассматривают также в иной форме:

$$\left\{\begin{matrix} g(x) \\ f(x) \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} dt \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2} \left\{\begin{matrix} f(t) \\ g(t) \end{matrix}\right\}, \qquad (3)$$

предполагается, что $f(t)$ удовлетворяет условию $\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) = 0$, тогда тем же свойством обладает $g(x)$. Ф-цию $(x-y)^{-1}$ наз. ядром Коши, а ф-цию $\operatorname{ctg} \frac{t-x}{2}$ — ядром Гильберта. Вещественная и мнимая части аналитич. ф-ции, не имеющей особенностей в верх. полуплоскости и достаточно быстро убывающей на бесконечности, связаны Г. п. (1); в этом случае оно носит назв. *дисперсионного соотношения*. Г. п. применяют при описании волновых процессов в диспергирующих средах в оптике, эл.-динамике, акустике, гидро- и аэродинамике, сейсмологии, а также в квантовой теории поля.

Лит.: Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974.

А. И. Оксак.

ГИ́ЛЬБЕРТОВО ПРОСТРА́НСТВО — комплексное *векторное пространство*, являющееся бесконечномерным полным *евклидовым пространством*. Это означает, что Г. п. $\mathscr{H}$ есть множество элементов, на к-ром, помимо операций векторного пространства (сложения и умножения на число), задана также комплекснозначная ф-ция от пары аргументов x, y из $\mathscr{H}$, обозначаемая (x, y) и удовлетворяющая след. условиям (аксиомам): 1) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$; 2) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$; 3) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{C}^1$; 4) $(x, y) = (y, x)^*$; *означает комплексное сопряжение (иногда рассматривают вещественные Г. п., к-рые являются векторными пространствами над полем $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяют аксиоме 3 с $\alpha \in \mathbb{R}^1$). Ф-ция (x, y) наз. скалярным или внутренним произведением. В силу аксиомы 1 на $\mathscr{H}$ также определена неотрицат. ф-ция $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, к-рая обладает всеми свойствами нормы на векторном пространстве; по отношению к ней $\mathscr{H}$ является нормированным и банаховым (т. е. полным нормированным) пространством.

Данное определение соответствует т. н. абстрактному Г. п.; выбирая в качестве элементов $\mathscr{H}$ последовательности, ф-ции или операторы определённых типов, получают разл. классы конкретных Г. п. Примеры: 1) пространство l^2 — совокупность всех последовательностей $x = \{x_n\}$, где x_n — комплексные числа, удовлетворяющие условию: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Умножение на число, сложение и скалярное произведение задаются ф-лами: $\alpha x = \{\alpha x_n\}$; $x + y = \{x_n + y_n\}$; $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*$. Аналогично построено пространство состояний конечномерной квантовой системы в представлении вторичного квантования.

2) Пространство $L^2(a, b)$ — совокупность всех комплекснозначных ф-ций, интегрируемых с квадратом на промежутке $[a, b]$ вещественной оси. Скалярное произведение ф-ций f, g из $L^2(a, b)$ задаётся ф-лой $(f, g) = \int_a^b f(x) g^*(x)\, dx$. Обобщением на случай $a = -\infty$, $b = \infty$ является пространство $L^2(\mathbb{R}^1)$.

3) Пространство $L^2(\mathbb{R}^1, d\mu)$ — совокупность всех комплекснозначных ф-ций f, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}^1$ по нек-рой мере μ. Скалярное произведение задаётся ф-лой $(f, g) = \int f(x) g^*(x)\, d\mu(x)$. Примеры 2 и 3 описывают собственные ф-ции одномерного ур-ния Шрёдингера, собственные ф-ции краевых задач в методе разделения переменных и т. д.

4) Пространство $\mathscr{H}(D)$ — совокупность всех аналитич. ф-ций в единичном круге D комплексной плоскости. Скалярное произведение задаётся ф-лой $(f, g) = \iint_D f(z) g^*(z)\, dx\, dy$, $z = x + iy$. Понятие Г. п. возникло в нач. 20 в. в осн. благодаря работам Д. Гильберта.

Нередко (напр., при квантовании эл.-магн. поля) приходится рассматривать пространства, к-рые не являются полными в смысле сходимости по норме $\|\ \|$ и (или) допускают равенство $(x, x) = 0$ для нек-рых $x \neq 0$. Каждое такое пространство наз. предгильбертовым; существует стандартная процедура, позволяющая достроить его до обычного Г. п. Важный подкласс составляют сепарабельные Г. п., размерность к-рых (в смысле векторных пространств) равна мощности счётного множества. Данный подкласс весьма широк (в частности, все Г. п. в примерах 1—4 сепарабельны; все подпространства сепарабельного Г. п. сепарабельны) и является основным для физ. приложений: в большинстве физ. моделей число состояний счётно. Любые 2 сепарабельных Г. п. изоморфны между собой, что позволяет выбрать удобную для физ. интерпретации форму. (Изоморфизм Г. п. $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ определяется как взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные соотношения в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ и скалярное произведение.) Как всякому топологич. векторному пространству Г. п. $\mathscr{H}$ сопоставляется сопряжённое векторное пространство $\mathscr{H}^*$ линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{H}$; важное отличит. свойство Г. п. составляет теорема Рисса, согласно к-рой $\mathscr{H}^*$ изоморфно $\mathscr{H}$ и для любого $f \in \mathscr{H}^*$ найдётся единств. элемент $x \in \mathscr{H}$, такой, что $f(y) = (x, y)$ для всех $y \in \mathscr{H}$.

Геометрия Г. п. является непосредств. обобщением геометрии конечномерных евклидовых пространств. Как и в любом евклидовом пространстве, в Г. п. имеют место 2 фундам. соотношения: неравенство Коши — Буняковского — Шварца $|(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\|$ и тождество параллелограмма $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ для любых x, $y \in \mathscr{H}$ (последнее свойство является необходимым и достаточным критерием, выделяющим евклидовы пространства в классе нормированных пространств). Обширный спектр геом. свойств связан с отношением ортогональности: 2 вектора x, $y \in \mathscr{H}$ (или 2 множества M, $N \subset \mathscr{H}$) наз. взаимно ортогональными, если $(x, y) = 0$ [или соответственно $(z, w) = 0$ для всех $z \in M$, $w \in N$]. Для каждого подпространства $M \subset \mathscr{H}$ множество всех векторов из $\mathscr{H}$, ортогональных к M, образует подпространство $M^\perp$, наз. ортогональным дополнением M и обладающее тем свойством, что $M \oplus M^\perp = \mathscr{H}$ ($\oplus$ обозначает прямую сумму подпространств векторного пространства, в случае Г. п. отличающуюся тем дополнит. свойством, что элементы этой суммы взаимно ортогональны). Размерность M равна коразмерности $M^\perp$, $M^{\perp\perp} = M$. Каждый вектор $x \in \mathscr{H}$ можно однозначно представить в виде $x = z + w$, где $z \in M$, $w \in M^\perp$; вектор z наз. проекцией x на M. На этом