

ся аналогом ур-ния Эйри. Вероятность перехода определяется ф-лой

$$w_1 = \exp\left(-\frac{2 \operatorname{Im} S_1}{\hbar}\right), \quad (9)$$

где действие $S = \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{E}_1(t) - \mathcal{E}_2(t)] dt$, а t_0 — момент пересечения термов, находящийся, вообще говоря, в комплексной плоскости. При двукратном прохождении точки пересечения вероятность перехода равна $w_2 = 2w_1(1-w_1)$. Возмущение V , приводящее к переходу между термами невозмущённой системы, приводит к отталкиванию уровней и невозможности их пересечения при веществ. временах. Если возмущение V мало по сравнению с характерной разностью энергий вдали от точки пересечения, то момент t_0 недалёк от веществ. оси. В этом случае

$$\operatorname{Im} S = \frac{\pi V^2}{|\mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2|}, \quad (10)$$

где $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2$ — производные от невозмущённых уровней энергии в точке пересечения. В случае, когда медленным является относит. движение двух ионов в молекуле, $\mathcal{E}'_i = v F_i$, где v — скорость движения ядер вблизи точки пересечения термов, F_i — сила, действующая на ядра, когда электроны находятся в состоянии с номером i . Подставляя (9) и (10) в выражение для w_2 , получаем ф-лу Ландау — Зинера:

$$w_2 = 2w_1(1-w_1); \quad w_1 = \exp\left(-\frac{2\pi V^2}{\hbar v |F_1 - F_2|}\right). \quad (11)$$

Если один из уровней принадлежит непрерывному спектру, то ф-ла (11) описывает явление преддиссоциации молекулы.

К. п. с известными оговорками обобщается на случай движения в многомерном пространстве. Волновую ф-цию в этом случае можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum \sqrt{\frac{A(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})}} \exp[iS(\mathbf{r})/\hbar] (1 + O(|\nabla \lambda|)). \quad (12)$$

Здесь $S(\mathbf{r})$ — классич. действие, подчиняющееся Гамильтона — Якоби уравнению:

$$(\nabla S)^2 = p^2(\mathbf{r});$$

величина $A^{-1}(\mathbf{r})$ — относит. площадь сечения бесконечно тонкого пучка классич. траекторий, проведённого нормально к импульсу $\mathbf{p} = \nabla S$; суммирование в (12) проводится по всем классич. траекториям, проходящим через заданную точку \mathbf{r} . Решние (12) обеспечивает закон сохранения числа частиц. Ф-ция $A(\mathbf{r})$ удовлетворяет ур-нию $\operatorname{div}[(\mathbf{p}/p)A] = 0$, эквивалентному ур-нию непрерывности для пучка частиц. Аналогичное построение в оптике наз. методом эйконала или геометрической оптики методом. Площадь сечения пучка траекторий пропорц. произведению гл. радиусов кривизны поверхности волнового фронта $S = \text{const}$. Поверхности, на к-рых $A^{-1}(\mathbf{r})$ обращается в нуль, наз. *каустиками*. Они являются огибающими классич. траекторий, отделивающими классически доступные области от недоступных, подобно точкам поворота в одномерной задаче. В классически недоступной области волновая ф-ция по-прежнему имеет вид (12), но $S(\mathbf{r})$ становится чисто мнимым, так что волновая функция экспоненциально убывает.

Вблизи каустик, но вдали от их особых точек волновая ф-ция сравнительно быстро меняется по нормали и медленно в касательной к каустике плоскости. Приближённое решение вблизи каустик, как и в одномерном случае, подчиняется эталонным уравнениям, простейшим и наиболее типичным из к-рых является уравнение Эйри. Решение эталонных уравнений позволяет «спить» квазиклассич. волновые ф-ции по обе стороны каустики.

Построение квазиклассич. волновых ф-ций, данное выше, обобщается на случай системы мн. частиц, а так-

же на случай произвольной зависимости энергии от импульса, что важно в теории твёрдого тела.

К. п. в многомерном случае, данное ур-нием (12), осмысленно только при конечном и не слишком большом числе траекторий, проходящих через данную точку. Для этого необходимо, чтобы классич. движение было устойчивым хотя бы в нек-рых областях. Др. словами, нек-рая часть фазового пространства должна расслаиваться на инвариантные торы (см. Гамильтонова система), по к-рым движется классич. система. Тогда правила квантования Бора — Зоммерфельда принимают вид

$$\oint_{C_i} p dq = (n_i + \gamma_i) 2\pi\hbar, \quad (13)$$

где p — обобщённый импульс, q — обобщённая координата, интегрирование в (13) ведётся по одной из независимых замкнутых кривых на торе, вообще говоря, не совпадающей с классич. траекторией, γ_i — число, зависящее от того, сколько раз кривая C_i касается каустики. Если известна, хотя бы приближённо, к. н. замкнутая устойчивая классич. траектория, то в её окрестности правила квантования (13) позволяют найти большое число уровней. Соответствующие волновые ф-ции локализованы в узком канале вокруг классич. траектории, площадь канала $\sigma \approx \sqrt{R\lambda}$, где R — характерный линейный размер траектории.

Наиб. просто квазиклассич. правила квантования применяются для высоковозбуждённых состояний систем с почти разделяющимися переменными. Если невозмущённая система невырождена, т. е. частоты $\omega_i = \hbar^{-1} \partial \mathcal{E}_0 / \partial n_i$ несоизмеримы ($\mathcal{E}_0(n)$ — энергия невозмущённой системы, n_i — квантовые числа), то энергия изменяется на величину $\langle V \rangle$ возмущения V , усреднённого по всем фазовым переменным, а волновая ф-ция сосредоточена в окрестности $\Delta n_i \sim |V|/\hbar \omega_i$ около фиксированных значений n_i^0 . Если нек-рые из частот соизмеримы, напр. две частоты ω_1 и ω_2 равны друг другу, то разность соответствующих угл. переменных $\varphi_1 - \varphi_2$ медленно меняется, а квантовое число $k = n_1 - n_2$ изменяется в широком интервале. Усреднённое по быстрым фазам возмущение V является гамильтонианом для медленных переменных.

Правила перехода от квантовых к классич. величинам таковы. Классич. частоты определяют расстояния между соседними уровнями. Матричные элементы физ. величин переходят в фурье-компоненты соответствующих классич. величин. Наконец, *перестановочным соотношениям* операторов в квантовой механике соответствуют классические Пуассона скобки, помноженные на $-i\hbar$.

Общепринято представление о том, что в случае, когда классич. движение хаотично, квантовая система демонстрирует нерегулярное поведение высоковозбуждённых уровней. Их ср. плотность $\rho(\mathcal{E})$ определяется, как и в случае свободных частиц, производной по энергии от объёма классически доступной области в фазовом пространстве. Напр., для частицы, движущейся в потенц. поле $U(\mathbf{r})$ в трёхмерном пространстве

$$\rho(\mathcal{E}) = (2\pi)^{-2} (2m)^{3/2} \hbar^{-3} \int_{\mathcal{E} > U(\mathbf{r})} [\mathcal{E} - U(\mathbf{r})]^{1/2} d\mathbf{r}.$$

Но расстояния между уровнями флуктуируют. Задача о распределении расстояний между уровнями не решена, намечены только нек-рые подходы к ней. Мало известно о статистич. характеристиках волновых ф-ций. Численные методы и теоретич. соображения показывают, что квадрат модуля волновой ф-ции максимален вблизи периодич. классич. траекторий, даже если они неустойчивы. Энергия системы на такой траектории соответствует максимуму плотности состояний.

Для вычисления вероятности туннелирования в многомерном случае необходимо найти траекторию, про-