

одновременно. В любом состоянии системы между дисперсиями этих величин существует соотношение неопределённости (СН):

$$\Delta f^2 \cdot \Delta g^2 \geq \frac{1}{4} |[\hat{f}, \hat{g}]|^2, \quad (39)$$

где $[f, g] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ — коммутатор операторов \hat{f} и \hat{g} . Поскольку коммутатор физ. величин в классич. пределе должен обращаться в нуль, величина его пропорциональна \hbar . Поэтому правая часть соотношения (39) пропорциональна \hbar^2 . В частности, для оператора компоненты импульса и соответствующей координаты

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar, \quad (40)$$

и СН для этих величин имеет вид:

$$\Delta p_x^2 \cdot \Delta x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (41)$$

Оно означает, что для состояния, в к-ром частица локализована в области пространства Δx (рис. 5, а),

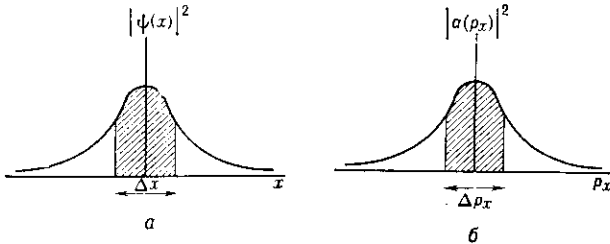


Рис. 5.

возможный разброс значений её импульса (около его ср. значения) заключён в области Δp_x (рис. 5, б), определяемой соотношением

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar. \quad (42)$$

Т. о., монохроматич. волна с определ. импульсом ($\Delta p_x \rightarrow 0$) должна заполнять всё пространство ($\Delta x \rightarrow \infty$). Соотношение (39) может быть уточнено путём использования новой характеристики — корреляции величин f, g . Если определить коэф. корреляции r :

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\bar{f} - \bar{f})(\bar{g} - \bar{g}) + (\bar{g} - \bar{g})(\bar{f} - \bar{f})}{\sqrt{\Delta f^2 \cdot \Delta g^2}},$$

то для состояний, в к-рых $r \neq 0$ (39), принимает вид:

$$\Delta f^2 \cdot \Delta g^2 \geq \frac{1}{4} \frac{|[\hat{f}, \hat{g}]|^2}{1 - r^2}.$$

Состояния системы, минимизирующие СН (т. е. отвечающие знаку равенства), наз. *когерентными состояниями*.

СН играет большую эвристич. роль, т. к. мн. результаты задач, рассматриваемых в К. м., могут быть получены и поняты на основе комбинации законов классич. механики с СН. Важный пример — проблема устойчивости атома. Рассмотрим эту задачу для атома водорода. Пусть электрон движется вокруг ядра (протона) по круговой орбите радиуса r со скоростью v . По закону Кулона сила притяжения электрона к ядру равна e^2/r^2 , где e — заряд электрона, а центростремит. ускорение равно v^2/r . По второму закону Ньютона, $mv^2/r = e^2/r^2$ (m — масса электрона), т. е. радиус орбиты $r = e^2/mv^2$ может быть сколь угодно малым, если v достаточно велика. Но в К. м. должно выполняться СН. Если допустить неопределённость положения электрона в пределах радиуса его орбиты r , а неопределённость скорости — в пределах v , т. е. неопределённость импульса в пределах $\Delta p = mv$, то (41) можно представить в виде: $mvr \geq \hbar$. Отсюда можно получить $v \leq e^2/\hbar$ и $r \geq \hbar^2/me^2$. Следовательно, движение электрона по орби-

те с $r \leq a_B = \hbar^2/me^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$ см невозможно, т. е. электрон не может упасть на ядро — атом устойчив. Величина a_B и является радиусом атома водорода (боровским радиусом). Ему соответствует максимально возможная энергия связи атома $\mathcal{E}_0 = -e^2/2a_B \approx -13,6$ эВ, определяющая его минимальную энергию — энергию основного состояния.

Т. о., квантовомеханические представления впервые дали возможность теоретически оценить размеры атома, выразив его радиус через мировые постоянные \hbar, m, e .

Указанные соображения позволяют понять устойчивость др. систем и оценить их характерные энергии. Действительно, из СН следует, что для частицы с массой m , совершающей движение в области с линейными размерами $\sim r_0$, ср. кинетич. энергия будет $\bar{T} \geq \hbar^2/mr_0^2$. Применяя эту оценку к нуклонам в ядре [$m \approx 1,6 \times 10^{-24}$ г, $r_0 \approx (10^{-13} - 10^{-12})$ см], получаем характерные энергии порядка (1—10) МэВ. В то же время для вращат. уровней молекулы водорода ($r_0 \sim 10^{-8}$ см) она даёт оценку 10^{-2} эВ.

Для некоммутирующих величин СН являются частным случаем общего *дополнительности принципа* Бора.

СН для энергии и времени требует особого рассмотрения (см. ниже).

Производная физической величины по времени

Ср. значение физ. величины является, вообще говоря, ф-цией времени. Это определяется зависимостью от времени вектора состояния $|\psi\rangle$, рассматриваемого в (36) в *Шрёдингера представлении*. (Помимо этого возможна явная зависимость оператора \hat{f} от времени.) Производная ср. значения \bar{f} по времени является ср. значением некоего оператора, к-рый, по определению, наз. производной физ. величины по времени:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \overline{\left(\frac{d\hat{f}}{dt}\right)}, \quad (43)$$

где

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{f}]. \quad (44)$$

С др. стороны, если использовать ф-лу (21), то зависимость в (36) от времени может быть перенесена с векторов состояния на операторы \hat{f}_H :

$$\bar{f} = \langle \psi_0 | \hat{f}_H | \psi_0 \rangle,$$

$$\hat{f}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{f} \hat{U}(t, t_0). \quad (45)$$

Это соответствует *Гейзенберга представлению*. Используя ур-ние $i\hbar \partial \hat{U} / \partial t = \hat{H} \hat{U}$, к-рому подчиняется оператор эволюции, можно получить для производной $d\hat{f}_H/dt$ выражение, по форме аналогичное (44), но имеющее др. смысл, т. к. оно относится непосредственно к производной физ. величины, представленной её гейзенберговым оператором:

$$\frac{d\hat{f}_H}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right)_H + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{f}_H]. \quad (46)$$

Можно использовать также *взаимодействия представления*, являющееся в нек-ром смысле промежуточным между представлениями Шрёдингера и Гейзенберга.

Из (44) и (46) следует, в частности, что ср. значения физ. величин изменяются по законам классич. механики; это положение наз. *Эренфеста теоремой*. В соответствии с ним центр волнового пакета в предельном случае малых длин волн будет двигаться по классич. траектории.