с заданными (однородными) краевыми условиями на границе области изменения переменных (x, t) наз. ф-ция $G(x, t; \xi, \tau)$, удовлетворяющая при каждом (ξ, τ) из этой области ур-нию

$$L(x,t;D)G(x,t;\xi,\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau). \tag{15}$$

В физ. ситуациях ф-ция Грина $G(x, t; \xi, \tau)$ описывает возмущение от точечного (в точке ξ) мгновенного (в момент τ) источника единичной интенсивности (с учётом неоднородности среды и краевого эффекта). В случае постоянных коэф. и отсутствия границы ф-ция Грина при $\xi = 0$ и $\tau = 0$ наз. **фундаментальным решением** и обозначается $E(x, t)$:

$$L(D)E(x,t) = \delta(x,t). \tag{15'}$$

Доказано существование фундам. решения для любого оператора $L(D) \not\equiv 0$.

С помощью фундам. решения $E(x, t)$ решение $u(x, t)$ ур-ния

$$L(D)u = F(x,t) \tag{16}$$

с произвольной правой частью F (обобщённая ф-ция) выражается во всём пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ свёрткой

$$u = F * E = \int F(\xi,\tau)E(x-\xi,\ t-\tau)d\xi d\tau.$$

В этом состоит сущность метода точечного источника решения линейных задач матем. физики.

Методы решения. Для исследования и приближённого решения смешанных задач используют *разделения переменных метод* (метод Фурье) при условии, что коэф. в ур-нии и в граничном условии не зависят от времени t. Идея метода, напр. применительно к задачам (3), (10), (13), состоит в следующем: искомое решение $u(x, t)$ и правую часть $f(x, t)$ разлагают в ряд Фурье по собств. ф-циям $\{u_k\}$ краевой задачи (12), (13):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)u_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)u_k(x). \tag{17}$$

Подставляя эти ряды в ур-ние (3), для неизвестных ф-ций $b_k(t)$ получают ур-ние

$$b'_k(t) + \lambda_k b_k(t) = c_k(t), \quad k = 1,2,\ldots. \tag{18}$$

При этом, чтобы ряд (17) для u удовлетворял нач. условию (10), необходимо положить

$$b_k(0) = \int_G \rho(x)u_0(x)u_k(x)dx = a_k. \tag{19}$$

Решая задачу Коши (18), (19), получают формальное решение задачи (3), (10), (13) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\, c_k(\tau)d(\tau)\right]u_k(x). \tag{20}$$

Возникает задача обоснования метода Фурье: когда формальный ряд (20) даёт классич. или обобщённое решение задачи (3), (10), (13)? Аналогично метод Фурье применяют и к смешанной задаче (1), (9), (13).

Метод разделения переменных находит применение также и для решения краевых задач для ур-ния эллиптич. типа (5). При исследовании и приближённом решении краевых задач для ур-ния (5) используют вариац. методы. Так, напр., для задачи на собств. значения (12), (13) (при $\rho = 1$) собств. значения λ_k удовлетворяют вариац. принципу:

$$\lambda_k = \inf_{(u,u_i)=0;\ i=1,\ldots,k-1} (Lu,u)/(u,u), \tag{21}$$

где ф-ции сравнения $u(x)$ удовлетворяют (13); при этом inf в (21) реализуется на любой собств. ф-ции, соответствующей собств. значению λ_k, и только на ней.

Перечисленные краевые задачи не исчерпывают всё многообразие краевых задач матем. физики, это простейшие классич. примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физ. процессы, могут быть сложными: системы ур-ний, ур-ния высших порядков, нелинейные ур-ния. К ним в первую очередь относятся ур-ние Шрёдингера, ур-ния гидродинамики, переноса, магн. гидродинамики, ур-ния Максвелла, теории упругости, ур-ния Дирака, ур-ния Гильберта — Эйнштейна, ур-ния Янга — Миллса и др. В связи с поисками нетривиальных моделей, описывающих взаимодействие квантовых полей, возрос интерес к классич. нелинейным ур-ниям (см. *Нелинейные уравнения математической физики*).

Лит.: Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; его же, Обобщённые функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 3 изд., М., 1986; Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, 2 изд., М., 1983; Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1—4, М., 1977—82; Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1984. *В. С. Владимиров.*

МАТЕРИА́ЛЬНАЯ ТО́ЧКА — понятие, вводимое в механике для объекта бесконечно малых размеров, имеющего массу. Положение М. т. в пространстве определяется как положение геом. точки, что существенно упрощает решение задач механики. Практически всякое тело можно рассматривать как М. т. в случаях, когда расстояния, проходимые точками тела, очень велики по сравнению с его размерами. Кроме того, при изучении движения любой механич. системы (в частности, и твёрдого тела) закон движения её центра масс (центра тяжести) находится как закон движения М. т., имеющей массу, равную массе системы, и находящейся под действием всех внеш. сил, приложенных к системе.

МАТЕ́РИЯ И ДВИЖЕ́НИЕ — философские категории, являющиеся мировоззренческими основаниями науки в рамках материалистич. философских учений. С точки зрения материалистич. диалектики, материальное единство мира, представляющего собой движущуюся материю, служит философским основанием единства системы естественных и технических наук. Каждая из этих наук по-своему конкретизирует материалистич. представления о М. и д., разрабатывая специфич. модели структуры, движения и взаимодействия разл. материальных образований, служащих объектами их изучения, в соответствии с уровнем развития обществ.-историч. практики, являющейся критерием истины, основой и целью познания.

Согласно материалистич. диалектике, материя — это объективная реальность, данная нам в ощущении. Движение, понимаемое как «изменение вообще»,— способ существования материи — нет движения без материи, как нет и материи без движения. Материальный мир рассматривается как сложная многоуровневая развивающаяся система взаимосвязанных материальных образований, каждое из к-рых, как и весь материальный мир в целом, воплощает в себе единство устойчивости и изменчивости, дискретности и непрерывности и др. диалектич. противоположностей. Субординация и координация материальных образований в рамках всеобщей связи объектов и явлений описывается с помощью представлений о разл. структурных уровнях, формах движения и видах материи, конкретизируемых соответствующими частными науками. Всеобщими формами существования материи являются *пространство и время*, выражающие соответственно порядок сосуществования и смены отд. материальных образований и их состояний.