рац. пространство является 3-мерным М. [оно совпадает с группой 3-мерных вращений $SO(3)$]. М. являются также непрерывные группы и однородные пространства (см. *Группа*). Понятие М. возникло в результате обобщения понятия поверхности; применяется в разл. областях теоретич. физики (аналитич. механика, теория тяготения, квантовая теория поля, теория калибровочных полей и др.). Часто в физике используют М. с дополнительными математическими структурами, например М. со *связностью*.

Наличие координат позволяет распространить на произвольное дифференцируемое М. мн. методы матем. анализа, развитые первоначально для 3-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (см. *Векторный анализ*), а затем перенесённые в n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Гл. трудностью является то, что в М., как правило, нет выделенной системы координат (подобной декартовой системе координат в $\mathbb{R}^n$). Поэтому приходится рассматривать все возможные системы координат и строить теорию так, чтобы можно было переходить от одной системы координат к другой. Напр., в теории тяготения, где предполагается, что пространство-время является римановым М. (см. *Риманово пространство*), требование, чтобы ур-ния не зависели от выбора системы координат, является одним из важных принципов (принцип общей ковариантности).

В дифференц. геометрии (т. н. матем. анализ на М.) всё большее распространение получают бескоординатные методы, в к-рых координаты явно не фигурируют (по крайней мере при нек-рых общих доказательствах и рассуждениях). Это удобно и важно с точки зрения физ. приложений, т. к. позволяет отвлечься от несуществ. деталей (связанных с выбором конкретной системы координат) и сделать явным инвариантный характер используемых матем. объектов (отсутствие зависимости от системы координат). В 3-мерном анализе аналогом такого подхода является использование вектора $\boldsymbol{a}$ вместо его компонент a_i, $i = 1, 2, 3$ (к-рые меняются при изменении системы отсчёта). Разумеется, в бескоординатном подходе неявно всегда присутствуют координаты, т. к. они необходимы для определения всех осн. понятий.

В физ. приложениях М. часто возникают как подмножества в евклидовом пространстве, заданные с помощью ур-ний. Напр., двумерная сфера S^2 определяется как поверхность в $\mathbb{R}^3$, выражаемая ур-нием $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; n-мерная сфера S^n определяется как множество точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, выделяемых ур-нием $\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1$ (здесь x^i — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$); независимые ур-ния $\Phi_k(x^1, \ldots, x^n) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, выделяют в $\mathbb{R}^n$ М. размерности $n - m$.

Системы координат. Каждая система координат на многообразии M определяется в нек-рой области $U \subset M$ и сопоставляет каждой точке этой области, $x \in U$, набор вещественных чисел $\{x^1, \ldots, x^n\}$ (координат этой точки). При этом область U (координатная окрестность) взаимно однозначно отображается на некоторую область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Именно возможность такого отображения позволяет перенести в М. аналитич. методы, развитые первоначально на $\mathbb{R}^n$. Напр., на сфере S^2 пара чисел $\{x, y\}$ может служить координатами точек верх. полусферы ($z > 0$) или ниж. полусферы ($z < 0$). Однако её нельзя рассматривать как систему координат на всей сфере, т. к. иначе двум разным точкам сопоставлялся бы один и тот же набор координат. Сферич. координаты $\{\theta, \varphi\}$ определяют ф-лами $x = \sin\theta\,\cos\varphi$, $y = \sin\theta\,\sin\varphi$, $z = \cos\theta$ на всей сфере S^2, за исключением её полюсов (точек $x = y = 0$, $z = \pm 1$). Числа $\xi = 2x/(1-z)$, $\eta = 2y\,(1-z)$ (получающиеся при т. н. стереографич. проекции сферы S^2 на плоскость) могут служить координатами на всей сфере, за исключением её северного полюса (точки $x = y = 0$, $z = 1$).

Двумерная сфера S^2 — пример М., на к-ром не только не существует выделенной системы координат, но к-рое вообще нельзя покрыть единой системой координат. Причина в том, что сфера радикально отличается от плоскости $\mathbb{R}^2$ своими топологич. свойствами, т. е. не может быть непрерывным образом деформирована в плоскость (см. *Топология*). Чтобы иметь координаты в окрестности каждой точки сферы, необходимо рассмотреть более одной системы координат. В общем случае в М. вводят целое семейство систем координат так, чтобы области их определения (координатные окрестности) в совокупности покрывали всё М. Каждую систему координат из этого семейства наз. картой, а всё семейство — атласом. Для согласования карт друг с другом используют ф-ции перехода между ними. Если области определения U, U' двух карт имеют общие точки, то каждой такой точке $x \in U \cap U'$ сопоставляют два разл. набора координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$ и $\{x'^1, \ldots, x'^n\}$. Тем самым определяются ф-ции перехода $x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, к-рые должны быть непрерывными. То же самое делают для каждой пары карт из атласа. М. наз. дифференцируемым (класса C^∞), если все возникающие при этом ф-ции перехода бесконечно дифференцируемы. Иногда требуют лишь дифференцируемости до порядка p (М. класса C^p).

Напр., стандартная структура М. на сфере S^2 (согласованная со структурой объемлющего евклидова пространства $\mathbb{R}^3$) задаётся атласом из 3 карт: сферич. координатами $\{\theta, \varphi\}$ вне полюсов, координатами $\{x, y\}$ в верх. полусфере и координатами $\{x, y\}$ в ниж. полусфере. При этом сфера оказывается (бесконечно) дифференцируемым М. Структуру М. на S^2 можно определить эквивалентным атласом из 2 карт: $\{x, y\}$ в верх. полусфере и стереографич. координаты $\{\xi, \eta\}$ на всей сфере, за исключением северного полюса. Эквивалентность 2 атласов означает, что ф-ции перехода между любыми 2 картами обоих атласов дифференцируемы.

Дифференцируемые отображения. Наличие координат позволяет определить понятие дифференцируемой ф-ции на М., опираясь на известное понятие дифференцируемой ф-ции числовых переменных. Если ф-ция $x \to \varphi(x)$ задана в каждой точке $x \in M$, то в координатной окрестности $U \subset M$ её можно записать как ф-цию координат точки $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$. Если использование каждой карты, входящей в атлас, приводит при этом к дифференцируемой ф-ции числовых переменных, то исходная ф-ция на М. наз. дифференцируемой.

В приложениях часто рассматривают не только числовые ф-ции на М., но и отображения одного М. на другое, $\alpha : M \to N$. При этом многообразия M и N могут иметь любые размерности. Напр., параметризованную кривую на М. можно считать отображением $t \to x(t)$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ (область изменения параметра) в данное М. Др. примером могут служить взаимно однозначные отображения М. на себя, $\alpha : M \to M$, к-рые обычно наз. преобразованиями М. Важную роль в физике играют преобразования симметрии.

Выбирая в многообразиях M и N системы координат $\{x^1, \ldots, x^m\}$ и $\{y^1, \ldots, y^n\}$, можно по отображению $\alpha : M \to N$ построить набор ф-ций числовых переменных: $y^i = \alpha^i(x^1, \ldots, x^m)$, $i = 1, \ldots, n$. Если при любом выборе карт в M и N эти ф-ции оказываются дифференцируемыми, то отображение α наз. дифференцируемым. Дифференцируемое отображение наз. диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и обратное к нему также дифференцируемо. Важную роль играют диффеоморфизмы М. на себя, называемые также дифференцируемыми преобразованиями. В физ. приложениях возникают группы диффеоморфизмов (преобразований), сохраняющих ту или иную дополнит. матем. структуру на М.

Напр., преобразования, сохраняющие метрику риманова пространства, образуют группу его изометрий,