

сервативных Н. с., — ударные волны, в т. ч. стационарные ударные волны, имеющие вид бегущего перепада (скачка) к.-л. физ. параметров, напр. давления в акустич. ударной волне. Ударные волны возникают как результат эволюции простых волн: энергия ВЧ-гармоник, генерируемых за счёт нелинейности, эффективно поглощается и «опрокидывания» волны не происходит.

В прикладном отношении наиб. важны нелинейные эффекты в активных Н. с., в к-рых энергия колебаний может пополняться вследствие неустойчивостей, обусловленных неравновесностью системы. К таким Н. с. относятся прежде всего генераторы колебаний — от лампового до квантовых (мазеров и лазеров), часы — от ходиков до кварцевых и т. п., в к-рых устанавливаются устойчивые незатухающие колебания с периодом и амплитудой, в широких пределах не зависящими от нач. условий, — автоколебания. Простейший генератор автоколебаний — автогенератор на ламповом триоде, в к-ром потери энергии в колебат. контуре компенсируются пополнением её за счёт неперриодич. источника (батареи). Поступление энергии в контур в нужной фазе колебаний осуществляется при помощи обратной связи на управляющий электрод лампы. При перестройке параметров Н. с. могут происходить качественные изменения её поведения — бифуркации. Например, колебания в ламповом генераторе возникают при величине обратной связи, большей нек-рого бифуркационного значения.

Как и колебания в консервативных Н. с., колебания в активных Н. с. могут быть не только регулярными, но и стохастическими. Существуют генераторы стохастич. автоколебаний — Н. с., в к-рых возможны незатухающие хаотич. колебания со сплошным спектром за счёт энергии нешумовых источников. Самозарождение в Н. с. стохастич. колебаний — один из возможных путей возникновения турбулентности.

В активных колебат. Н. с., в к-рых возможно одновременно существование мн. мод (типов) колебаний с разл. частотами, получающих энергию от общего источника, возникает явление конкуренции мод, т. к. связь между модами порождает зависимость нелинейного затухания или усиления каждой из мод от интенсивности других. Конкуренция мод приводит к тому, что в итоге преобладает одна из них и колебания автогенератора происходят на соответствующей ей частоте. Если моды равноправны и связь их взаимна, то устанавливается режим генерации моды, преобладавшей вначале. В таких Н. с., как, напр., лазер, конкуренция мод происходит и во времени, и в пространстве, что приводит, в частности, к установлению в пространственно-симметричном протяжённом автогенераторе несимметричных в пространстве распределений поля с преобладанием одной из встречных волн. Это один из простейших примеров самоорганизации в Н. с. — возникновение пространственного порядка из нач. беспорядка и образование сложных пространственных структур в однородных (протяжённых) неравновесных Н. с. (физ., хим., биологических и т. п.). Примерами самоорганизации в Н. с. являются конвективные ячейки жидкости, подогреваемой снизу, волны горения, волны популяций в экологич. системах, волновые возбуждения в сердечной ткани.

Лит.: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, [3 изд.], М., 1981; Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959; Уизем Д. Ж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; Рабинович М. И., Трубецков Д. И., Введение в теорию колебаний и волн, М., 1984. А. Я. Васович.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ — ур-ния, не обладающие свойством линейности; применяются в физике как матем. модели нелинейных явлений в разл. сплошных средах. Н. у. м. ф. — важная часть матем. аппарата, используемого в фундам. физ. теориях: теории тяготения и квантовой теории поля.

Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными ур-ниями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных ур-ний зависит от роли, к-рую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физ. ситуацией. Напр., при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности эл.-магн. поля. Возникающие при этом Н. у. м. ф. являются основой матем. аппарата нелинейной оптики.

Линейные ур-ния, используемые в физике, являются результатом линеаризации более точных Н. у. м. ф. на фоне их простейших (фоновых) решений. Исторически первым примером Н. у. м. ф. были найденные в 18 в. Эйлера уравнения для идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v + \rho^{-1} \nabla P = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ , P , v — плотность, давление и скорость жидкости. Для баротропной жидкости, когда $P = P(\rho)$, ур-ния Эйлера можно линеаризовать на фоне тривиального решения $\rho = \rho_0$, $v_0 = 0$ в предположении потенциальности поля скоростей: $v = \nabla \phi$. Полагая $\rho = \rho_0 + \delta \rho$, $\delta \rho \ll \rho_0$, получаем из (1) волновое уравнение для звуковых волн. Однако при рассмотрении вихревых движений жидкости, когда её можно считать несжимаемой, $\rho = \rho_0$, $\operatorname{div} v = 0$, ур-ния Эйлера (1) становятся существенно нелинейными. Их линеаризация на фоне решения $v_0 = 0$ приводит к тривиальному ур-нию $\partial v / \partial t = 0$.

Т. о., линеаризация Н. у. м. ф. не всегда ведёт к поддержанию результата. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные ур-ния сохраняют применимость лишь конечное время. Эта ситуация типична, если фоновое решение неустойчиво, но может иметь место и при устойчивом фоновом решении. Так, однородные ур-ния Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

при произвольном нач. условии $\rho \rightarrow \rho_0$, $v \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$ описывают образование ударных волн. При этом за достаточно большое время теряют применимость не только линейное приближение, но и сами ур-ния (2), решения к-рых при $t \rightarrow \infty$ становятся неоднозначными.

Даже если линеаризация Н. у. м. ф. возможна, с точки зрения физики исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных ур-ний. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или неск. измерениях (см. Солитон), или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства (см. также Самофокусировка света). Существенно нелинейными являются и стационарные решения ур-ний гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в т. ч. гидродинамич. течений и солитонов, к-рый решается либо при помощи линеаризации Н. у. на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок.

Решения Н. у. м. ф. во мн. случаях обнаруживают тенденцию к стохастизации. В этом случае они требуют статистич. описания, что составляет предмет теории турбулентности. Турбулентность часто развивается как результат неустойчивости фонового состояния. Если уровень нелинейности решения остаётся малым, то говорят о слабой турбулентности, в противном случае — о сильной турбулентности. Сильная турбулентность может сопровождаться волновыми коллапсами, целиком или частично состоять из взаимодействующих солитонов.