коммутативно и ассоциативно. Напр., $\delta(x) = \delta(x_1) \times \times \ldots \times \delta(x_n)$.

Свёртка. Если $f(x)$ и $g(x)$ локально интегрируемы в $\mathbb{R}^n$ и ф-ция $h(x) = \int|g(y)f(x-y)|dy$ также локально интегрируема в $\mathbb{R}^n$, то свёрткой $f * g$ наз. ф-ция

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy.$$

Эта ф-ция локально интегрируема в $\mathbb{R}^n$ и определяет регулярную О. ф.:

$$(f * g, \varphi) = \int f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy = (f(x)\times g(y), \varphi(x+y)), \ \varphi \in D. \tag{6}$$

Свёртка заведомо существует, если одна из ф-ций f или g финитна. Если свёртка существует, то она коммутативна: $f * g = g * f$; справедливы ф-лы дифференцирования свёртки:

$$f * \partial^\alpha g = \partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g.$$

Если учесть, что $f * \delta = \delta * f = f$, получим $\partial^\alpha f = f * \partial^\alpha \delta$.

Свёртка, вообще говоря, не ассоциативна. Однако если рассмотреть, напр., совокупность D'_+ О. ф. из $D'(\mathbb{R}^1)$, обращающихся в нуль при $x < 0$, то их свёртка существует и ассоциативна.

О. ф. $\mathscr{E}$ из D' наз. ф у н д а м е н т а л ь н ы м р е ш е н и е м (ф-цией точечного источника) дифференц. оператора $L(\partial)$ с пост. коэффициентами, если она удовлетворяет ур-нию

$$L(\partial)\mathscr{E}(x) = \delta(x).$$

Зная фундам. решение $\mathscr{E}$ оператора $L(\partial)$, можно построить решение ур-ния $L(\partial)u = f$ для тех f из D', для к-рых свёртка $f * \mathscr{E}$ существует, и это решение даётся ф-лой $u = f * \mathscr{E}$. Напр., для ур-ния $\Delta\mathscr{E} = \delta(x)$

$$\mathscr{E}(x) = \ln|x|/2\pi, \ n = 2; \ \mathscr{E}(x) = -1/4\pi|x|, \ n = 3$$

(см. также *Грина функция*).

Преобразование Фурье определяют для класса О. ф. $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ медленного роста. Пространство основных ф-ций $S = S(\mathbb{R}^n)$ состоит из ф-ций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Норма в S задаётся выражением

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha|\leqslant p}(1+|x|^2)^{p/2}|\partial^\alpha\varphi(x)|, \ \varphi \in S, \ p = 0, 1, \ldots$$

Локально интегрируемые в $\mathbb{R}^n$ ф-ции медленного роста содержатся в S', определяя по ф-ле (2) регулярные функционалы на S. Всякая О. ф. из S' есть нек-рая производная от непрерывной ф-ции медленного роста и, стало быть, имеет конечный порядок в $\mathbb{R}^n$.

П р е о б р а з о в а н и е Ф у р ь е $F[f]$ О. ф. f из S' определяется равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in S,$$

где

$$F[\varphi](\xi) = \int\varphi(x)\exp[i(\xi, x)]dx, \quad \varphi \in S \ -$$

классич. преобразование Фурье. Обратная операция к F:

$$F^{-1}[f] = (2\pi)^{-n}F[f(-\xi)], \ f \in S'.$$

Основные ф-лы для $f \in S'$:

$$\partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f], \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n};$$

$$F[\partial^\alpha f] = (i\xi)^\alpha F[f]; \ F[f * g] = F[f]F[g],$$

если g финитна. Если О. ф. f — периодическая с периодом $T = (T_1, \ldots, T_n)$, $T_j > 0$, то $f \in S'$ и её можно разложить в тригонометрич. ряд

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(f)\exp[i(k\omega\, x)], \ |c_k(f)| \leqslant A(1+|k|)^m,$$

сходящийся к f в S'; здесь

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi}{T_n}\right), k\omega = \left(\frac{2\pi k_1}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right).$$

Напр., $F[x^\alpha] = (2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(\xi)$, в частности $F[1] = (2\pi)^n\delta(\xi)$; $F[\partial^\alpha\delta] = (-i\xi)^\alpha$, в частности $F[\delta] = 1$; $F(\theta) = i/(\xi + i0) = \pi\delta(\xi) + i\mathscr{P}(1/\xi)$.

Преобразование Лапласа в одномерном случае. Пусть S'_+ — пересечение множеств S' и D'_+, тогда множество О. ф. из D'_+, таких, что $f(x)\exp(-\sigma x) \in S'_+$ при всех $\sigma > a$, обозначают $D'_+(a)$. Если f и $g \in D'_+(a)$, то $f * g \in D'_+(a)$, причём $(f * g)\exp(-\sigma x) = f\exp(-\sigma x) * g\exp(-\sigma x)$, $\sigma > a$.

Пусть $f \in D'_+(a)$, тогда преобразование Лапласа f есть

$$L_f(p) = F[f(x)\exp(-\sigma x)](-\omega) = 2\pi F^{-1}[f(x)\exp(-\sigma x)](\omega), \ \sigma > a.$$

$L_f(p)$ — аналитич. ф-ция в полуплоскости $\sigma > a$. Ф-цию $f(x)$ наз. о р и г и н а л о м, ф-цию $L_f(p)$ — и з о б р а ж е н и е м, между ними имеется взаимно однозначное соответствие $f(x) \leftrightarrow L_f(p)$, $\sigma > a$. Обратное преобразование определяют равенством

$$f(x) = (2\pi)^{-1}\exp(\sigma x)F_\omega[L_f(\sigma + i\omega)](x), \quad \sigma > a.$$

Справедливы след. ф-лы:

$$\partial^m L_f(p) \longleftrightarrow (-x)^m f(x),$$
$$p^m L_f(p) \longleftrightarrow \partial^m f(x),$$
$$(f * g)(x) \longleftrightarrow L_f(p)L_g(p).$$

Напр.,

$$\partial^m\delta(x-\xi) \longleftrightarrow p^m\exp(-\xi p),$$
$$\xi \geqslant 0, \ p \text{ — любое}, \ m = 0, 1, \ldots$$

Лит.: Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е., Обобщенные функции, в. 1—3, М., 1958; Д и р а к П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; Ш в а р ц Л., Математические методы для физических наук, пер. с франц., М., 1965; В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; е г о ж е, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; А н т о с и к П., М и к у с и н с к и й Я., С и к о р с к и й Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, пер. с англ., М., 1976; Р и х т м а й е р Р., Принципы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1982; Б о г о л ю б о в Н. Н., Л о г у н о в А. А., О к с а к А. И., Т о д о р о в И. Т., Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЁННЫЕ ИМПУЛЬСЫ — физ. величины, p_i, определяемые ф-лами $p_i = \partial T/\partial\dot{q}_i$, где T — кинетич. энергия, или $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$, здесь L — *Лагранжа функция*. T и L относятся к классич. механич. системе, зависят от *обобщённых координат* q_i, обобщённых скоростей $\dot{q}_i$ и времени t. Размерность О. и. зависит от размерности обобщённой координаты. Если размерность q_i — длина, то p_i имеет размерность обычного импульса, т. е. произведения массы на скорость; если же координатой q_i является угол (величина безразмерная), то p_i имеет размерность момента кол-ва движения, и т. д.

ОБОБЩЁННЫЕ КООРДИНАТЫ — независимые между собой параметры q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) любой размерности, число к-рых равно числу s степеней свободы механич. системы и к-рые однозначно определяют положение системы. Закон движения системы в О. к. даётся s ур-ниями вида $q_i = q_i(t)$, где t — время. О. к. пользуются при решении мн. задач, особенно когда система подчинена связям, налагающим ограничения на её движение. При этом значительно уменьшается число ур-ний, описывающих движение системы по срав-