но

$$[F(\hat{\boldsymbol p}),\hat p_\alpha]_- = [G(\hat{\boldsymbol r}),\hat r_\alpha]_- = 0.$$

Для системы из N частиц динамич. переменные представляются совокупностью координат $\boldsymbol r_1, \ldots, \boldsymbol r_N$ и импульсов $\boldsymbol p_1, \ldots, \boldsymbol p_N$ и в написанных выше ф-лах аргументы $\boldsymbol r$ и $\hat{\boldsymbol p}$ заменяются на $\boldsymbol r_1, \ldots, \boldsymbol r_N$ и $\hat{\boldsymbol p}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol p}_N$, где каждое $\hat{\boldsymbol p}_i$ является дифференц. О., действующим на аргумент $\hat{\boldsymbol r}_i$ ф-ции $\psi(\boldsymbol r_1, \ldots, \boldsymbol r_N)$.

В качестве примеров для О. $\hat F(\boldsymbol p,\boldsymbol r)$ может служить оператор Гамильтона (*гамильтониан*) $\hat H$, играющий принципиальную роль во всей квантовой теории и определяющий данную конкретную систему, и О. орбитального (углового) момента $\hat{\boldsymbol M}$. Для N взаимодействующих между собой нерелятивистских частиц гамильтониан имеет вид

$$\hat H = \sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left\{\hat{\boldsymbol p}_i^2/2m_i + U(\boldsymbol r_i)\right\} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(\boldsymbol r_i, \boldsymbol r_j),$$

где m_i — масса i-й частицы, $U(\boldsymbol r_i)$ и $\Phi(\boldsymbol r_i, \boldsymbol r_j)$ — потенциалы взаимодействия частиц с внеш. полем и друг с другом (если это взаимодействие не зависит от скоростей частиц). Для системы заряж. частиц О. импульса заменяется:

$$\hat{\boldsymbol p}_i \to \hat{\boldsymbol p}_i - (e_i/c)\boldsymbol A(\boldsymbol r_i, t),$$

где $\boldsymbol A(\boldsymbol r,t)$ — векторный потенциал эл.-магн. поля, e_i — заряд частицы (в гауссовой системе единиц).

О. момента $\hat{\boldsymbol M}$ представляет собой сумму О. моментов для каждой из N частиц. Для одной частицы $\hat{\boldsymbol M} = [\boldsymbol r\hat{\boldsymbol p}] = [(\boldsymbol r(\hbar/i)\nabla]$. Компоненты О. моменты не коммутируют друг с другом, $[\hat M_x, \hat M_y]_- = i\hat M_z$ (две др. пары соотношений получаются при циклич. замене $x\to y\to z\to x$), но $[\hat{\boldsymbol M}^2, \hat M_\alpha]_- = 0$, поэтому в квантовой теории имеет смысл говорить о состояниях с определёнными значениями квадрата момента и одной из его компонент, обычно $\hat M_z$. Эти О. как коммутирующие друг с другом имеют общую систему собств. ф-ций [*сферические функции* $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$, где ϑ и φ — угл. переменные сферич. координат] и характеризуются собств. значениями $\boldsymbol M^2 = \hbar^2 l(l+1)$ и $M_z = \hbar m$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = -l, -l+1, \ldots, l$ — соответственно орбит. и магн. квантовые числа. Если частица движется в центрально-симметричном поле $U(\boldsymbol r) = U(|\boldsymbol r|)$, то $\hat H$, $\hat{\boldsymbol M}^2$ и $\hat M_z$ образуют полный набор коммутирующих О. для данной системы с общей системой собств. ф-ций $R_{nl}(|\boldsymbol r|)Y_l^m(\vartheta,\varphi)$, причём l определяет не только величину $\boldsymbol M^2$ (и наряду с гл. квантовым числом n энергетич. состояние системы), но и пространственную *чётность* состояния, характеризующую изменение волновой ф-ции при инверсии координат, $\hat P\psi(\boldsymbol r) \equiv \psi(-\boldsymbol r) = (-1)^l\psi(\boldsymbol r)$ ($\hat P$ — О. инверсии), т. е. чётность состояния совпадает с чётностью l.

Импульсное представление. Если разложить $\psi(\boldsymbol r)$ по собств. ф-циям $\psi_{\boldsymbol p}(\boldsymbol r)$ О. импульса:

$$\psi(\boldsymbol r) = \int\Phi(\boldsymbol p)\psi_{\boldsymbol p}(\boldsymbol r)d\boldsymbol p, \quad \Phi(\boldsymbol p) = \int\psi(\boldsymbol r)\psi^*_{\boldsymbol p}(\boldsymbol r)d\boldsymbol r,$$

то волновой ф-цией системы в *импульсном представлении* (в к-ром квадрат её модуля определяет распределение плотности вероятности распределения по $\boldsymbol p$) будет её фурье-образ $\Phi(\boldsymbol p)$. В соответствии с этим преобразованием О. координаты становится дифференциальным, а О. импульса — О. умножения:

$$\hat{\boldsymbol r}\Phi(\boldsymbol p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial\boldsymbol p}\Phi(\boldsymbol p); \quad \hat{\boldsymbol p}_0\Phi(\boldsymbol p) = \boldsymbol p_0\Phi(\boldsymbol p).$$

Нормированные на δ-функцию собств. ф-ции этих О. имеют вид

$$\Phi_{\boldsymbol r}(\boldsymbol p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}\exp\{-i\boldsymbol p\boldsymbol r/\hbar\}; \quad \Phi_{\boldsymbol p_0}(\boldsymbol p) = \delta(\boldsymbol p - \boldsymbol p_0).$$

О. динамич. величин $\hat F(\boldsymbol p,\boldsymbol r)$ определяются как

$$\hat F(\boldsymbol p, \boldsymbol r) = F(\hat{\boldsymbol p}, \hat{\boldsymbol r}) = F\left(\boldsymbol p, i\hbar\frac{\partial}{\partial\boldsymbol p}\right).$$

Матричное представление. Рассмотренные выше представления являются частными случаями, когда в качестве системы базисных ф-ций $\{\psi_n(x)\}$ выбирались собств. ф-ции координаты или импульса. В общем случае волновая ф-ция системы $\psi(x,t)$ может быть задана совокупностью компонент $\Phi(t) = \{\Phi_n(t)\}$ в пространстве с достаточно произвольно выбранным базисом $\{\psi_n(t)\}$,

$$\Phi_n(t) = \int\psi(x,t)\psi_n^*(x)dx,$$

причём величины $|\Phi_n(t)|^2$ определяют вероятности обнаружить систему в каждом из состояний $\psi_n(x)$. Представляя $\psi(x,t)$ в виде столбца из её компонент $\{\Phi_n(t)\}$ [сопряжённую ей — в виде строки из элементов $\Phi_n(t)$], а $\hat F$ в виде квадратной матрицы

$$\langle n|F|m\rangle = \int\psi_n^*(x)\hat F\psi_m(x)dx,$$

можно записать результат действия этого О. $\hat F\psi = f\psi'$ в виде алгебраич. соотношений, определяющих изменённые в результате поворота вектора $\Phi(t)$ значения компонент $\Phi'(t)$ через их исходные значения:

$$f\Phi'_n = \sum_m\langle n|F|m\rangle\Phi_m, \quad \sum_n\left|\Phi'_n\right|^2 = 1.$$

Матричные представления могут быть дискретными, непрерывными (как в случаях координатного и импульсного представления) и смешанного типа, когда часть квантовых чисел, входящих в n, дискретна, часть непрерывна. Приведём неск. общих соотношений в матричном выражении. Алгебраич. действия над О.:

$$\langle n|F_1\cdot F_2|m\rangle = \sum_k\langle n|F_1|k\rangle\langle k|F_2|m\rangle,$$

$$\langle n|F_1 + F_2|m\rangle = \langle n|F_1|m\rangle + \langle n|F_2|m\rangle;$$

условие самосопряжённости $\hat F$:

$$\langle n|F^+|m\rangle = \langle n|(F^T)^*|m\rangle = \langle m|F|n\rangle^*;$$

единичный О. $\langle n|I|m\rangle = \Delta(n-m)$ [в случае дискретного спектра $\Delta(n-m) = \delta_{nm}$, где δ_{nm} — *Кронекера символ*, в случае непрерывного спектра $\Delta(n-m) = \delta(n-m)$, где $\delta(n-m)$ — дираковская δ-функция]; ф-ла для ср. значений:

$$\overline{F} = \sum_{nm}\Phi_n^*\langle n|F|m\rangle\Phi_m.$$

Проблема расчёта собств. значений и собств. ф-ций сводится к решению системы однородных относительно компонент Φ_n ур-ний

$$\sum_m\langle n|F|m\rangle\Phi_m = f\Phi_n,$$

причём условие существования нетривиального решения для $\{\Phi_n\}$

$$\det\|\langle n|F|m\rangle - f\Delta(n-m)\| = 0$$

является ур-нием (степени, равной рангу матриц, фигурирующих в данном представлении), определяющим спектр собств. значений $\{f_n\}$.

Если в качестве базиса $\{\psi_n(x)\}$ выбрана система собств. ф-ций О. $\hat F$, то его матричное представление диагонально, $\langle n|F|m\rangle = f_n\Delta(n-m)$, поэтому проб-