при $\alpha > -1$, $\beta > -1$; полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ — с весом $x^\alpha e^{-x}$ на интервале $(0, \infty)$ при $\alpha > -1$, полиномы Эрмита $H_n(x)$ — с весом $\exp(-x^2)$ на интервале $(-\infty, \infty)$.

В случае выполнения условия (5) полиномы $y_n(x)$ наз. классическими О. п. Обычно эти полиномы рассматривают при дополнит. условии $\sigma(x) > 0$. Производные классич. О. п. $y_n^{(k)}(x)$ также являются классич. О. п., к-рые ортогональны с весом $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$ на интервале (a, b):

$$\int_a^b y_n^{(k)}(x) y_m^{(k)}(x)\rho_k(x)dx = \delta_{mn} d_{kn}^2.$$

Системы классич. О. п. замкнуты для непрерывных ф-ций $f(x)$, удовлетворяющих условию квадратичной интегрируемости, т. е. из равенств

$$\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)dx = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

следует, что $f(x) = 0$ при $x \in (a, b)$ для любых непрерывных ф-ций $f(x)$, удовлетворяющих условию $0 < \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx < \infty$.

Если ф-ция $\rho(x)$ на интервале (a, b) является ограниченным и положительным решением ур-ния $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, удовлетворяющим условию (5), то нетривиальные решения $y = y(x)$ ур-ния (3), для к-рых ф-ция $y(x)\rho^{1/2}(x)$ ограничена и квадратично интегрируема на интервале (a, b), существуют только при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - n(n-1)\sigma''/2, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и имеют вид

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = B_n[\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)}/\rho(x),$$

т. е. совпадают с классич. О.п. Если a и b конечны, то требование квадратичной интегрируемости можно опустить.

В табл. 1 приведены осн. характеристики полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.

Табл. 1.

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$	$L_n^\alpha(x)$, $\alpha > -1$	$H_n(x)$
(a,b)	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1+\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$
B_n	$(-1)^n/2^n n!$	$1/n!$	$(-1)^n$
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n! \pi^{1/2}$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Производящие ф-ции для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1 - t + R)^{-\alpha}(1 + t + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^\infty P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n,$$

$$R = (1 - 2tx + t^2)^{1/2}, \quad |t| < 1;$$

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)t^n, \quad |t| < 1;$$

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^\infty H_n(x)t^n/n!$$

Асимптотич. представления при $n \to \infty$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \approx \frac{\cos\{[n + (\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)\pi/4\}}{(\pi n)^{1/2}(\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}},$$

$$0 < \delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta,$$

$$L_n^\alpha(x) \approx \pi^{-1/2}e^{x/2}x^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}\cos[2(nx)^{1/2} - (2\alpha+1)\pi/4],$$

$$0 < \delta \leqslant x \leqslant N < \infty,$$

$$H_n(x) \approx 2^{1/2}(2n/e)^{n/2}e^{x^2/2}\cos(x\sqrt{2n} - \pi n/2),$$

$$|x| \leqslant N < \infty.$$

Классические О. п. дискретной переменной. Заменим (2) разностным ур-нием второго порядка точности по h на сетке $x = x(s)$ с переменным шагом $\Delta x = x(s + h) - x(s)$. После замены s на hs получим

$$\sigma[x(s)]\frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)}\left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \frac{\tau[x(s)]}{2}\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda y(s) = 0, \quad (6)$$

где $\Delta y(s) = y(s+1) - y(s)$, $\nabla y(s) = y(s) - y(s-1)$.

Для сеток

$$x = \begin{cases} as^2 + bs + c, \\ C_1 q^s + C_2 q^{-s} + C_3 \end{cases}$$

(a, b, c, C_1, C_2, C_3 — постоянные), к-рые линейными преобразованиями $x(s) \to c_1 x(s) + c_2$, $s \to \pm s + c$ можно привести к канонич. видам

$$x(s) = \begin{cases} s \\ s(s+1) \\ \exp(2\omega s), \operatorname{sh}(2\omega s), \operatorname{ch}(2\omega s) \\ \cos(2\omega s) \end{cases}$$

(ω — постоянная), выполняется простое свойство, аналогичное осн. свойству ур-ния (2): в результате разностного дифференцирования (6) получается ур-ние того же типа.

При определ. значениях $\lambda = \lambda_n$ ур-ние (6) имеет частные решения $y(s) = \tilde{y}_n[x(s)]$, где $\tilde{y}_n(x)$ — полином степени n относительно переменной x. Полиномиальные решения $y(s) = \tilde{y}_n(x)$, $x = x(s)$ ур-ния (6) даются разностным аналогом ф-лы Родрига:

$$\tilde{y}_n(x) = \frac{B_n}{\rho(s)}\nabla^{(n)}[\rho_n(s)], \quad (7)$$

где B_n — постоянная, $\rho_n(s) = \rho(s+n)\prod_{i=1}^n \sigma(s+i)$, ф-ция $\rho(s)$ — решение ур-ния

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s)$$

при

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}[x(s)] - 2^{-1}\tilde{\tau}[x(s)]\Delta x(s - 1/2),$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)],$$

$$\nabla^{(n)} = \left(\frac{\nabla}{\nabla x_1}\right)\left(\frac{\nabla}{\nabla x_2}\right)\cdots\left(\frac{\nabla}{\nabla x_n}\right),$$

$$x_k(s) = x(s + k/2), \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Нек-рые из этих решений имеют самостоят. значение и используются в квантовой механике, теории представлений групп, вычислит. математике, теории вероятностей.

Ф-ла, аналогичная (7), справедлива для разностных производных от полиномиальных решений ур-ния (6). С помощью (7) можно получить ф-лы разностного дифференцирования, свойства симметрии и ряд других свойств полиномов $y_n(x)$.

При выполнении условий

$$\sigma(s)\rho(s)x^k(s - 1/2)|_{s=a,b} = 0, \ k = 0, 1, \ldots$$