

при  $\alpha > -1, \beta > -1$ ; полиномы Лагерра  $L_n^\alpha(x)$  — с весом  $x^\alpha e^{-x}$  на интервале  $(0, \infty)$  при  $\alpha > -1$ , полиномы Эрмита  $H_n(x)$  — с весом  $\exp(-x^2)$  на интервале  $(-\infty, \infty)$ .

В случае выполнения условия (5) полиномы  $y_n(x)$  наз. классическими О. п. Обычно эти полиномы рассматривают при дополнит. условии  $\sigma(x) > 0$ . Производные классич. О. п.  $y_n^{(k)}(x)$  также являются классич. О. п., к-рые ортогональны с весом  $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$  на интервале  $(a, b)$ :

$$\int_a^b y_n^{(k)}(x) y_m^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \delta_{mn} d_{kn}^2.$$

Системы классич. О. п. замкнуты для непрерывных ф-ций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию квадратичной интегрируемости, т. е. из равенств

$$\int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

следует, что  $f(x) = 0$  при  $x \in (a, b)$  для любых непрерывных ф-ций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию  $0 <$

$$\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx < \infty.$$

Если ф-ция  $\rho(x)$  на интервале  $(a, b)$  является ограниченным и положительным решением ур-ния  $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ , удовлетворяющим условию (5), то нетривиальные решения  $y = y(x)$  ур-ния (3), для к-рых ф-ция  $y(x)\rho^{1/2}(x)$  ограничена и квадратично интегрируема на интервале  $(a, b)$ , существуют только при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - n(n-1)\sigma''/2, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и имеют вид

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = B_n [\sigma^n(x) \rho(x)]^{(n)} / \rho(x),$$

т. е. совпадают с классич. О. п. Если  $a$  и  $b$  конечны, то требование квадратичной интегрируемости можно опустить.

В табл. 1 приведены осн. характеристики полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \alpha > -1, \beta > -1$	$L_n^\alpha(x), \alpha > -1$	$H_n(x)$
$(a, b)$	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	$e^{-x^2}$
$\sigma(x)$	$1-x^2$	$x$	$1$
$\tau(x)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$1 + \alpha - x$	$-2x$
$\lambda_n$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$n$	$2n$
$B_n$	$(-1)^n / 2^n n!$	$1/n!$	$(-1)^n$
$d_n$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n! \pi^{1/2}$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Производящие ф-ции для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$2^{2+\beta} R^{-1} (1-t+R)^{-\alpha} (1+t+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n,$$

$$R = (1-2tx + t^2)^{1/2}, \quad |t| < 1;$$

$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1;$$

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n / n!$$

Асимптотич. представления при  $n \rightarrow \infty$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta) \approx \frac{\cos\{[n + (\alpha + \beta + 1)/2]\theta - (2\alpha + 1)\pi/4\}}{(\pi n)^{1/2} (\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}},$$

$$0 < \delta \leq \theta \leq \pi - \delta,$$

$$L_n^\alpha(x) \approx \pi^{-1/2} e^{x^2/2} x^{-x/2 - 1/4} n^{x/2 - 1/4} \cos[2(nx)^{1/2} - (2\alpha + 1)\pi/4],$$

$$0 < \delta \leq x \leq N < \infty,$$

$$H_n(x) \approx 2^{1/2} (2n/e)^{n/2} e^{x^2/2} \cos(x\sqrt{2n} - \pi n/2),$$

$$|x| \leq N < \infty.$$

Классические О. п. дискретной переменной. Заменяем (2) разностным ур-нием второго порядка точности по  $h$  на сетке  $x = x(s)$  с переменным шагом  $\Delta x = x(s + h) - x(s)$ . После замены  $s$  на  $hs$  получим

$$\sigma[x(s)] \frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)} \left[ \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \frac{\tau[x(s)]}{2} \left[ \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta y(s) = y(s + 1) - y(s)$ ,  $\nabla y(s) = y(s) - y(s - 1)$ . Для сеток

$$x = \begin{cases} as^2 + bs + c, \\ C_1 q^s + C_2 q^{-s} + C_3 \end{cases}$$

( $a, b, c, C_1, C_2, C_3$  — постоянные), к-рые линейными преобразованиями  $x(s) \rightarrow c_1 x(s) + c_2$ ,  $s \rightarrow \pm s + c$  можно привести к канонич. видам

$$x(s) = \begin{cases} s \\ s(s+1) \\ \exp(2\omega s), \operatorname{sh}(2\omega s), \operatorname{ch}(2\omega s) \\ \cos(2\omega s) \end{cases}$$

( $\omega$  — постоянная), выполняется простое свойство, аналогичное осн. свойству ур-ния (2): в результате разностного дифференцирования (6) получается ур-ние того же типа.

При определ. значениях  $\lambda = \lambda_n$  ур-ние (6) имеет частные решения  $y(s) = \tilde{y}_n[x(s)]$ , где  $y_n(x)$  — полином степени  $n$  относительно переменной  $x$ . Полиномиальные решения  $y(s) = \tilde{y}_n(x)$ ,  $x = x(s)$  ур-ния (6) даются разностным аналогом ф-лы Родрига:

$$\tilde{y}_n(x) = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)} [\rho_n(s)], \quad (7)$$

где  $B_n$  — постоянная,  $\rho_n(s) = \rho(s + n) \prod_{i=1}^n \sigma(s + i)$ ,

ф-ция  $\rho(s)$  — решение ур-ния

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)} [\sigma(s) \rho(s)] = \tau(s) \rho(s)$$

при

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}[x(s)] - 2^{-1} \tilde{\tau}[x(s)] \Delta x(s - 1/2),$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)],$$

$$\nabla^{(n)} = \left( \frac{\nabla}{\nabla x_1} \right) \left( \frac{\nabla}{\nabla x_2} \right) \dots \left( \frac{\nabla}{\nabla x_n} \right),$$

$$x_k(s) = x(s + k/2), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Нек-рые из этих решений имеют самостоят. значение и используются в квантовой механике, теории представлений групп, вычислит. математике, теории вероятностей.

Ф-ла, аналогичная (7), справедлива для разностных производных от полиномиальных решений ур-ния (6). С помощью (7) можно получить ф-лы разностного дифференцирования, свойства симметрии и ряд других свойств полиномов  $y_n(x)$ .

При выполнении условий

$$\sigma(s) \rho(s) x^k (s - 1/2) |_{s=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$