стояние dl, покажут величину интервала $d\tau$, поскольку в сопровождающей их системе отсчёта они покоятся. Отсюда следует

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2, \tag{13}$$

где dl — пройденный отрезок, или

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}. \tag{14}$$

Соответственно время, измеренное часами, движущимися по нек-рой траектории AB, равно след. интегралу по траектории, по к-рой движутся часы B:

$$\tau = \int_A^B dt\sqrt{1-\beta^2}. \tag{15}$$

Этот же результат можно записать в виде

$$\tau = \int_A^B ds,$$

где интеграл берётся по траектории часов. Из (15) видно, что движущиеся часы всегда отстают от неподвижных. Так же как и в рассмотренном выше частном случае, справедливость (15) требует, чтобы ускорения были достаточно малы и не оказывали действия на ход часов.

Из (9) следует закон сложения скоростей. Для частного случая, когда тело движется в L' параллельно оси x со скоростью V', имеем для скорости тела в L

$$V = \frac{V'+v}{1+vV'/c^2}, \tag{16}$$

где v — скорость L' относительно L. Если рассматривать ф-лу (16) как активное преобразование, то она описывает буст точки, имевшей первоначально скорость V'. Из этой ф-лы сразу видна независимость скорости света от движения источника: при $V' = c$ получаем $V = c$. Из неё также следует ф-ла Френеля частичного увлечения света источником. Если свет распространяется в среде с показателем преломления n, движущейся со скоростью v, то $V' = c/n$ и для скорости света в лаб. системе L имеем

$$c' = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Аберрация света и видимая форма предметов в частной О. т.

Пусть система L' (с осями, параллельными осям системы L) движется параллельно оси x системы L со скоростью v и пусть в L' движется импульс света под углом ϑ' к оси x'. Без ограничения общности можно считать, что импульс движется в плоскости $x'y'$ и в момент $t' = 0$ находится в точке $x' = y' = 0$. Из преобразований Лоренца получаем $x = (ct'\cos\vartheta' + vt')/\sqrt{1-\beta^2}$. Моменту времени t' соответствует в L время

$$t = (t' + (v/c)t'\cos\vartheta')/\sqrt{1-\beta^2},$$

и за это время импульс в L пройдёт путь $l = ct$. Отсюда для угла луча (соответствующего рассматриваемому импульсу света) с осью x в L получаем

$$\cos\vartheta = \frac{x}{l} = \frac{\cos\vartheta' + v/c}{1 + (v/c)\cos\vartheta'}. \tag{17}$$

Т. о., движущийся наблюдатель видит объект в др. направлении, чем неподвижный наблюдатель.

Если объект наблюдается под малым телесным углом, то изображение предмета, видимое движущимся наблюдателем, сохраняет свою форму, но оказывается повёрнутым; если наблюдатель в L видит покоящийся в L' предмет под углом ϑ, то изображение, к-рое он получит на мгновенной фотографии, будет соответствовать изображению в L' на снимке под углом ϑ' (в L' изображение, очевидно, не зависит от момента снимка). Действительно, пусть импульсы света $1'$ и $2'$ в L' дают изображение в L' в момент t'. Пусть S_1 и S_2 — их положения в момент t в L. В системе L' им соответствует разное время t_1' и t_2', $t_1' - t_2' = \Delta t' \neq 0$. Квадрат интервала между S_1 и S_2 равен

$$s^2 = c^2(\Delta t')^2 - (l')^2,$$

где l' — трёхмерное расстояние между S_1 и S_2, равное $\sqrt{(r')^2 + c^2(\Delta t')^2}$, r' — расстояние между лучами $1'$ и $2'$. Т. о., $s^2 = -(r')^2$. В системе L $t_1 = t_2$, фронт волны перпендикулярен к направлению лучей 1 и 2 и $s^2 = -r^2$, где r — расстояние между лучами в L. Т. к. s — инвариант, то $r^2 = (r')^2$, что и доказывает сделанное выше утверждение. Более подробно вопрос о видимых изображениях рассмотрен В. Вайскопфом (V. Weisskopf) и В. Риндлером (W. Rindler) в 1977. Это явление не противоречит, разумеется, сокращению масштабов, описанному в предыдущем разделе, т. к. там речь шла о мгновенных измерениях, здесь же решающую роль играет запаздывание импульсов, идущих от разных точек тела.

Пространство скоростей

Пространством скоростей в частной О. т. называется пространство, каждой точке к-рого соответствует частица, движущаяся с данной скоростью $\boldsymbol{v}$, а квадрат расстояния dl_v^2 для двух бесконечно близких точек P, Q равен квадрату их относит. скорости, измеренной по часам в P и Q. Первое утверждение предполагает введение нек-рой системы отсчёта и в этом смысле координатно-зависимо, второе имеет абс. смысл. Удобно ввести след. параметризацию. Для коллинеарных скоростей, как следует из преобразований Лоренца, справедлив закон сложения скоростей (здесь и ниже будем полагать $c = 1$, что приводит к существ. упрощению ф-л):

$$v_{02} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}, \tag{18}$$

где v_1 — скорость точки 1 относительно начала отсчёта 0, v_2 — скорость точки 2 относительно точки 1 и v_{02} — скорость точки 2 относительно 0. Эта ф-ла была получена выше для движения частицы по оси x, но, очевидно, справедлива всегда, если движение происходит по одной прямой. Введём параметр $\varkappa$ такой, что $v = \operatorname{th}\varkappa$. Тогда (18) принимает вид

$$\operatorname{th}\varkappa_{02} = \frac{\operatorname{th}\varkappa_1 + \operatorname{th}\varkappa_2}{1 + \operatorname{th}\varkappa_1 \operatorname{th}\varkappa_2} = \operatorname{th}(\varkappa_1 + \varkappa_2), \tag{19}$$

т. е., в отличие от скорости, параметр $\varkappa$ аддитивен:

$$\varkappa_{02} = \varkappa_1 + \varkappa_2. \tag{20}$$

При $\varkappa \ll 1$ $v \simeq \varkappa$, откуда следует, что если в пространстве скоростей ввести в качестве радиальной координаты параметр $\varkappa$, то для двух точек, движущихся в одном направлении, квадрат расстояния в пространстве скоростей равен

$$dl_v^2 = dv_\parallel^2 = d\varkappa^2.$$

Для точек P и Q, движущихся с равными по модулю скоростями, образующими угол $d\varphi$, расстояние между ними, если они движутся из одной точки, растёт как $vd\varphi dt$ во времени покоящейся системы отсчёта. Т. к. dt связано с собств. временем $d\tau$ для P, Q соотношением $dt = d\tau/\sqrt{1-v^2}$, то

$$dl_v^2 = dv_\perp^2 = [v^2/(1-v^2)]d\varphi^2 = (\operatorname{sh}\varkappa)^2 d\varphi^2.$$

Очевидно, что относит. скорость не зависит от нач. условия (совпадения P и Q).

В бесконечно малой окрестности точки P пространства скоростей действует закон параллелограмма скоростей Ньютона. Поэтому $dv^2 = dv_\parallel^2 + dv_\perp^2$ и, следовательно, в случае движения в заданной плоскости

$$dl_v^2 = d\varkappa^2 + (\operatorname{sh}\varkappa)^2 d\varphi^2. \tag{21}$$