Как известно, такая метрика есть метрика плоскости Лобачевского. Это — двумерное пространство с постоянной гауссовой кривизной $K = -1$.

Аналогично, трёхмерному случаю соответствует трёхмерное пространство Лобачевского. В пространстве Лобачевского, как во всяком пространстве с заданной метрикой, можно ввести параллельный перенос. *Геодезические линии*, образуемые параллельным переносом, по определению, есть прямые в этом пространстве. Т. к. в любой его точке в малой окрестности действует ньютонов закон сложения скоростей, то в этой окрестности параллельный перенос означает сохранение направления скорости, а если переносится какой-то др. вектор, то он должен сохранять угол с направлением скорости. В частности, параллельному переносу из O в A (B) координатных осей соответствует чисто лоренцево преобразование (без вращения) к системе отсчёта, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2)$ (рис. 1). Параллельный перенос вдоль геодезической AB даёт чисто лоренцево преобразование от A к B. При этом из-за кривизны пространства система, полученная последовательностью переходов OA, AB, повёрнута (на угол α) относительно системы, полученной переходом OB. Это отражает тот факт, что чисто лоренцевы преобразования не образуют группы. Аналогично можно убедиться, что они не коммутируют между собой.

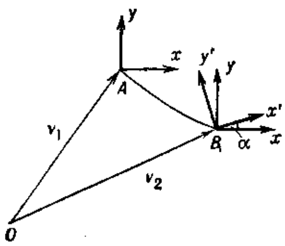

Рис. 1. Система $y'x'$ получена из yx параллельным переносом по AB.

Неевклидовость пространства скоростей непосредственно ответственна за явление, наз. т о м а с о в с к о й п р е ц е с с и е й [Л. Томас (L. Thomas), 1926]. Если физически реализованный вектор — ось гироскопа или спин частицы — связан с системой, движущейся ускоренно, а рассматриваемый вектор не испытывает воздействия к.-л. сил, то он переносится параллельно вдоль годографа скорости, и т. к. пространство имеет кривизну, он прецессирует. Для вычисления этой прецессии удобно ввести сопутствующую систему координат, получающуюся параллельным переносом из O в P. При движении из P в P' вектор переносится параллельно и по отношению к сопутствующим осям оказывается повёрнутым на угол $\delta\alpha = KS_{OPP'}$, где $K = -1$, $S_{OPP'}$ — площадь OPP', что даёт

$$\delta\alpha = -(\mathrm{ch}\varkappa - 1)d\varphi. \tag{22}$$

В случае движения по окружности, когда $\varkappa = \mathrm{const}$, для угл. скорости томасовской прецессии имеем

$$\alpha = -(\gamma - 1)\omega, \tag{23}$$

где ω — угл. частота. В нерелятивистском пределе $\alpha = -v^2\omega$. Это выражение используется при расчёте тонкой структуры в атомной физике.

С помощью аппарата четырёхмерных векторов, описанного в след. разделе, легко получить для относит. скорости v_{12} точек, движущихся со скоростями v_1 и v_2, образующими угол θ, ф-лу

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_{12}^2}} = \frac{1 - v_1 v_2 \cos\theta}{\sqrt{1 - v_1^2}\,\sqrt{1 - v_2^2}}$$

или

$$\mathrm{ch}\varkappa_{12} = \mathrm{ch}\varkappa_1 \mathrm{ch}\varkappa_2 - \mathrm{sh}\varkappa_1 \mathrm{sh}\varkappa_2 \cos\theta. \tag{24}$$

Ф-ла (24) является аналогом ф-лы косинусов сферич. тригонометрии для пространства Лобачевского.

Векторы и тензоры в пространстве Минковского

Для построения инвариантных и ковариантных выражений в частной О. т. используется тензорный аппарат в пространстве Минковского. Простейшей величиной, следующей за скаляром, является к о н т р а в а р и а н т н ы й ч е т ы р ё х м е р н ы й в е к т о р. Таковым является, в частности, 4-вектор x^μ с компонентами $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Закон преобразования для него задан ф-лами (8). Произвольный 4-вектор B^μ, преобразующийся по ф-лам (8), наз. контравариантным. Квадрат его длины $B^2 \equiv \eta_{\mu\nu} B^\mu B^\nu$ является инвариантной величиной.

Матрицы a^μ_ν и b^μ_ν связаны соотношением

$$b^\mu_\nu = \eta^{\mu\rho} a^\sigma_\rho \eta_{\sigma\nu}, \tag{25}$$

где

$$\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu.$$

Наряду с контравариантными компонентами вектора B^μ можно ввести к о в а р и а н т н ы е (часто говорят просто о ковариантных векторах) $B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu$. Для любых 4-векторов A, B можно определить скалярное произведение

$$(AB) = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu, \tag{26}$$

инвариантное относительно преобразований Лоренца.

Произвольный тензор $T^{(n)}_{(m)}$ ранга $n + m$ с n контравариантными и m ковариантными индексами определяется законом преобразования:

$$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = a^{\mu_1}_{\sigma_1} a^{\mu_2}_{\sigma_2} \ldots a^{\mu_n}_{\sigma_n} b^{\rho_1}_{\nu_1} b^{\rho_2}_{\nu_2} \ldots b^{\rho_m}_{\nu_m} T^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m}. \tag{27}$$

Из определения $\eta_{\mu\nu}$ следует, что он является инвариантным [переходящим сам в себя при преобразовании (27)] тензором второго ранга (то же относится к $\eta^{\mu\nu}$).

Из свойств преобразований Лоренца следует, что ранг тензора $T^{(n)}_{(m)}$ может быть понижен на 2: $T^{(n)}_{(m)} \to V^{(n-1)}_{(m-1)}$ свёртыванием (суммированием) по произвольной паре верхних и нижних индексов.

Примерами 4-векторов являются 4-импульс системы P^μ, 4-потенциал эл.-магн. поля A_μ и др. Четырёхмерные векторы классифицируются по их поведению относительно несобств. преобразований Лоренца: полярные векторы меняют знак пространственных компонент, а временна́я компонента не изменяется; аксиальные векторы ведут себя противоположным образом. Аналогичная классификация применяется и по отношению к величинам, инвариантным относительно преобразований Лоренца: они делятся на скаляры и псевдоскаляры.

Примером тензоров может служить тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и тензор эл.-магн. поля $F^{\mu\nu}$. Тензоры второго ранга $S^{\mu\nu}$ могут быть симметричными и антисимметричными, для к-рых соответственно $S^{\mu\nu} = \pm S^{\nu\mu}$. Тензор $T^{\mu\nu}$ является примером тензора первого типа, $F^{\mu\nu}$ — второго.

Рассматривая кинематику точки, движущейся по произвольной траектории под действием внеш. сил, удобно ввести в качестве параметра точки P величину $s = \int_A^P ds$, где интеграл берётся по траектории частицы от произвольной точки A, тогда $x^\mu = x^\mu(s)$. В том случае первая производная по s даёт вектор четырёхмерной скорости

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{28}$$

Т. к. $ds = dt\sqrt{1 - v^2}$, то

$$u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1 - v^2}},\ i = 1,2,3,\ u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{29}$$

Учитывая, что $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, и деля это выражение на ds^2, получаем

$$\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu u_\mu = 1. \tag{30}$$