

в волновом ур-нии, записанном в цилиндрич. координатах, при рассмотрении гармонич. осциллятора в квантовой механике и в др. задачах.

Лит.: Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1974; Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984; Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979. А. Ф. Никифоров.

**ПАРАДОКС ВОЗВРАТА** в статистической физике — кажущееся противоречие между существованием необратимых процессов в природе и теоремой А. Пуанкаре (H. Poincaré) о возвратах, согласно к-рой траектория консервативной динамич. системы в пространстве всех её обобщённых координат и импульсов (в фазовом пространстве  $N$  частиц) неограниченное число раз возвращается в окрестность своего нач. состояния. Предполагается, что нач. состояние выбирается случайным образом. П. в сформулирован Э. Цермело (E. Zermelo) в 1896 как возражение против *Больцмана  $H$ -теоремы*. Для доказательства теоремы Пуанкаре (1890) он воспользовался инвариантностью *фазового объёма* системы при движении её частиц согласно ур-ниям Гамильтона (*Лиувилля теорема*). Цермело заметил, что из теоремы Пуанкаре, если считать её неограниченно применимой к реальным системам статистич. физики и исключить сингулярные нач. состояния, следовала бы невозможность необратимых процессов. Никакая однозначная, непрерывная и дифференцируемая ф-ция состояния, подобная *энтропии*, не могла бы монотонно возрастать, т. к. каждому её возрастанию соответствовало бы её убывание при возвращении системы в нач. состояние. Разрешение П. в связано с теорией *флуктуаций* (см. *Парадокс обратимости*). В действительности теорема о возвратах Пуанкаре не имеет большого значения для статистич. физики, т. к. время возврата системы в микроскопич. нач. состояние чрезвычайно велико и подобный возврат имеет нулевую вероятность, а рассмотрение процессов возврата в макроскопическое состояние, как показал М. Смолуховский (M. Smoluchowski), не приводит к парадоксам.

Лит. см. при ст. *Парадокс обратимости*. Д. Н. Зубарев.

**ПАРАДОКС ВРЕМЕНИ** (парадокс близнецов, парадокс часов) — кажущееся противоречие, возникающее в частной (специальной) *относительности теории* при нахождении промежутков времени, показываемых двумя часами  $A$  и  $B$ , из к-рых часы  $A$  всё время покоились в инерциальной системе отсчёта, а часы  $B$  улетели от  $A$ , совершили путешествие и вновь вернулись к  $A$ .

Противоречие возникает при след. рассуждении. Согласно частной теории относительности, если по покоящимся часам  $A$  прошёл промежуток времени  $t$ , то по движущимся с пост. скоростью  $v$  часам  $B$  пройдёт промежуток времени

$$\tilde{t} = t\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1)$$

Если скорость движения часов  $B$  меняется с течением времени, то

$$\tilde{t} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2} dt, \quad (2)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — моменты начала и конца измерения времени по часам  $A$ . После возвращения  $B$  к  $A$  промежуток времени  $\tilde{t}$ , измеренный часами  $B$ , всегда меньше промежутка  $t$ , измеренного часами  $A$ , т. е. часы  $B$  отстают от  $A$ . Т. к. движение относительно, то, казалось бы, можно обратить рассуждение: считать часы  $B$  неподвижными, а часы  $A$  путешествовавшими и поэтому идущими медленнее, чем  $B$ . Тогда после возвращения должны отстать часы  $A$ . Полученное противоречие и наз. П. в. или парадоксом часов.

Вместо часов часто рассматривают двух близнецов, из к-рых один оставался на Земле, а другой совершал путешествие в космосе, а затем возвратился на Землю. Разницу в протекшем времени можно непосредственно

определить по тому, кто из близнецов окажется старше. Поэтому упомянутое противоречие называют также *парадоксом близнецов*.

В действительности противоречие (парадокс) возникло из-за некорректности рассуждения. Правильное рассуждение состоит в следующем. Часы  $A$  всё время находились в инерциальной системе отсчёта, они не подвергались ускорениям. В этой системе отсчёта ф-ла (2) всё время справедлива, и вывод о том, что по возвращении отстают часы  $B$ , правилен (путешествовавший близнец окажется моложе своего брата, оставшегося на Земле). Система отсчёта, связанная с часами  $B$ , не может быть всё время инерциальной, поскольку эти часы подвергались ускорению. В неинерциальных системах отсчёта ф-ла (2) неверна, и при рассмотрении хода движущихся часов надо учитывать ускорения, имеющиеся в системе отсчёта. Поэтому и вывод о том, что с точки зрения  $B$  часы  $A$  должны по возвращении отстать от  $B$ , неверен. В общем случае неинерциальных систем отсчёта ф-ла (2) должна быть заменена след. выражением:

$$\tilde{t} = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}^i + g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} dx^0. \quad (3)$$

Здесь  $g_{00}$ ,  $g_{0i}$ ,  $g_{ik}$  — компоненты *метрического тензора*, характеризующего систему отсчёта (по дважды встречающимся индексам подразумевают суммирование, латинские буквы принимают значения 1, 2, 3),  $x^0$  — временная,  $x^i$  — пространственные координаты,  $\dot{x}^i$  — компоненты скорости движущихся часов. Ф-ла (3) справедлива также при наличии полей тяготения, когда вместо частной теории относительности следует пользоваться общей теорией относительности (см. *Тяготение*).

Выводы о замедлении времени на движущихся телах и о влиянии на течение времени полей тяготения непосредственно проверены экспериментально и подтверждают теорию.

Лит. см. при ст. *Относительности теория*, *Тяготение*. И. Д. Новиков.

**ПАРАДОКС ОБРАТИМОСТИ** в статистической физике — кажущееся противоречие между обратимым характером движения молекул газа и очевидной необратимостью процессов переноса (теплопроводности, вязкости, диффузии). П. о. был сформулирован Й. Лосмидтом (J. Loschmidt) в 1876 как возражение против *Больцмана  $H$ -теоремы* для кинетич. ур-ния газа, из к-рого следует, что  $H$ -функция Больцмана не может возрастать [1—2].

Парадоксы *кинетической теории газов* возникли в связи с попытками обоснования *второго начала термодинамики* исходя из ур-ний механики. Обратимость ур-ний механики по отношению к *обращению времени* (замене  $t \rightarrow -t$ ) связана с тем, что (в отсутствие магн. поля) они содержат лишь вторые производные по времени, и поэтому нельзя отличить ур-ния механики, написанные для возрастающего времени, от ур-ний для убывающего времени. Если  $H$ -функцию Больцмана можно было бы получить лишь на основе механики, это привело бы к противоречию со вторым началом термодинамики о возрастании энтропии, т. к. для газов энтропия равна  $H$ -функции Больцмана (умноженной на  $k$ ) с обратным знаком.

При формулировке П. о. предполагается, что кинетич. ур-ние можно вывести из ур-ний механики без привлечения к.-л. вероятностных гипотез. В действительности в выводе Больцмана неявно содержится предположение вероятностного характера о том, что число столкновений пропорц. произведению *функций распределения* сталкивающихся частиц, т. е. состояние между каждым столкновением не коррелируют (гипотеза «молекулярного хаоса»). Более строгий вывод кинетич. ур-ния, данный Н. Н. Боголюбовым в 1946 [3], явно использует граничное условие «ослабления корреляций», имеющее вероятностный смысл.