

типа) имеет место при использовании условия пластичности макс. касательного напряжения и обобщенного ассоцииров. закона пластич. течения.

Для ребра призмы Треска, интерпретирующей в пространстве напряжений *пластичности условие* Треска, имеет место выражение

$$(\sigma_x - \sigma \pm 2/3k)\tau_{yz} = \tau_{xy}\tau_{xz}. \quad (7)$$

Система шести ур-ний: трёх ур-ний равновесия и трёх ур-ний (7) [недостающие два получаются из (7) круговой перестановкой индексов (x y z)] относительно шести неизвестных компонент напряжений σ_{ij} , как и в плоском случае, является статически определяемой.

Согласно теории обобщенного пластич. потенциала, любое деформиров. состояние может соответствовать ребру призмы Треска.

На основе модели *идеально-пластического тела* развиты теории технол. задач обработки металлов давлением, несущей способность конструкций оптимального проектирования, приспособляемости, динамики упруго-пластич. и жёсткопластич. тела и др.

Модели пластических сред. Обобщением теории идеальной пластичности для упрочняющегося материала является теория трансляц. упрочнения (А. Ю. Ишлинский), согласно к-рой происходит смещение поверхности пластичности как твёрдого целого в пространстве напряжений в зависимости от роста пластич. деформаций:

$$(\sigma_{ij} - c\epsilon_{ij}^p)(\sigma_{ij} - c\epsilon_{ij}^p) = 6k^2 \quad (k, c = \text{const}). \quad (8)$$

Компоненты $S_{ij} = c\epsilon_{ij}^p$ в (8) могут интерпретироваться как внутр. упругие микронапряжения. Теория трансляц. упрочнения описывает эффекты приобретённой анизотропии и связанный с ней эффект Баушингера.

Существуют разл. подходы к описанию поведения упрочняющихся пластич. тел. Теории скольжения рассматривают материал как поликристаллич. агрегат с равновероятным распределением форм и размеров зёрен в элементарном объёме тела, в к-ром выделяются преимущества, линии скольжения. Вклад отд. поверхностей скольжения в пластич. деформирование определяется в нек-рой интегральной форме. Подобные теории могут быть описаны в рамках теории обобщенного пластич. потенциала.

Деформационные теории пластичности. При активном простом (пропорциональном) нагружении соотношения теории малых упругопластич. деформаций (А. А. Ильюшин, 1943) имеют вид

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\epsilon_u} (\epsilon_x - \epsilon), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_u}{\epsilon_u} \epsilon_{xy}; \quad (9)$$

$$\sigma_u = \Phi(\epsilon_u), \quad \sigma = 3K\epsilon, \quad K = \text{const}, \quad (10)$$

где $\sigma = \sigma_{ii}/3$, $\epsilon = \epsilon_{ii}/3$, $\sigma_u = (\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$,

$$\epsilon_u = (\epsilon_{ij}\epsilon_{ij})^{1/2}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,$$

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij}\epsilon.$$

Согласно (9), векторы *девиаторов напряжений* и *девиаторов деформаций* коллинеарны. Соотношения (10) определяют функциональную зависимость модулей этих векторов, пропорциональность изменения объёма среднему давлению.

Сравнит. простота соотношений теории малых упругопластич. деформаций позволила получить ряд важных результатов при расчётах на прочность и устойчивость деталей конструкций (труб, стержней, пластин, оболочек), дать методы определения динамич. напряжений при продольном ударе стержней и т. д.

Теории упругопластических процессов. В теории сложного непростого, непропорционального нагружения (Ильюшин) аналогично пространству напряжений

вводится пятимерное пространство девиатора деформаций ϵ'_{ij} . В процессе деформирования вектор девиатора деформации описывает кривую, наз. траекторией деформации, внутр. геометрия к-рой описывается четырьмя кривизнами k_i , определяющими т. н. репер Френе, и пятью единичными векторами p_i .

Параметрами, характеризующими процесс деформации, являются: ориентация траектории, её внутр. геометрия (кривизна), скорость деформации, др. механич. и термодинамич. параметры, заданные как ф-ции длины дуги. Вектор напряжений σ определяется модулем $|\sigma| = \sigma_u$ и углами ориентации θ_k :

$$\sigma = \sigma_u \sum_{k=1}^5 p_k \cos \theta_k. \quad (11)$$

Для определения соотношений связи (11) устанавливают зависимость величин σ_u , θ_i (где $i = 1, \dots, 5$) от параметров произвольного процесса деформации.

Согласно постулату изотропии, для изотропного материала модуль вектора напряжений и углы его ориентации в репере Френе однозначно определяются изменением параметров процесса от его начала до текущего момента, т. е. они являются функционалами, порождаемыми ф-циями k_i и др. параметров. Полное определение функционалов пластичности по данным опыта чрезвычайно затруднительно, и пока предложены способы построения лишь части из них.

Другое свойство пластичности изотропного материала отражает принцип запаздывания: значения углов ориентации вектора напряжений в репере Френе зависят от изменения кривизны не на всей предшествующей траектории деформации, а на последней её части, длина к-рой, характерная для данного материала, наз. следом запаздывания. Это свойство позволило выделить неск. типов процессов (простой деформации, малой кривизны и т. п.), для к-рых соотношения между напряжениями и упругопластич. деформациями установлены конкретно и не содержат *функционалов*.

Идеи теории упругопластич. процессов реализуются в т. н. эндохронных теориях, использующих зависимость напряжения — деформации в виде функционала.

Лит.: Соколовский В. В., Теория пластичности, 3 изд., М., 1969; Прагер В., Ходж Ф., Теория идеально пластических тел, пер. с англ., М., 1956; Хилл Р., Математическая теория пластичности, пер. с англ., М., 1956; Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения, «ПММ», 1958, т. 22, с. 78; Ильюшин А. А., Пластичность. Основы общей математической теории, М., 1963; Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И., Теория упрочняющегося пластического тела, М., 1971; Реваженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И., Математические модели упругопластических тел, в сб.: Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования, Новосиб., 1985. Д. Д. Ивлев.

ПЛАСТИЧНОСТИ УСЛОВИЕ (текущего условия) — соотношение матем. *пластичности теории*, определяющее границу, отделяющую область пластического (точнее, упругопластического) состояния материала от области его упругого состояния. При выполнении П. у. в материале начинают возникать остаточные деформации. П. у. записывается в виде $f(\sigma_{ij}) = 0$, где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Для изотропного тела П. у. — ф-ция инвариантов тензора напряжений.

Установление П. у. — одна из осн. задач эксперим. работ, посвящённых феноменологич. теории пластичности. При эксперим. определении П. у. изучается однородное напряжённое состояние (состояние, при к-ром напряжения и деформации одинаковы во всех точках тела), к-рое реализуется в ср. части растягиваемых круглых или плоских образцов, а также при деформировании тонкостенных трубок, находящихся под действием растягивающей силы P , внутр. давления p и крутящего момента M (рис. 1). В др. случаях (плоское деформиров. состояние, пространственное напряжённое состояние и др.) П. у. подтверждается лишь косвенно при сравнении теоретич. и эксперим. значений П. у.,