быть разложено в прямую сумму (или интеграл) неприводимых представлений.

Группа $\mathscr{P}_0$ локально изоморфна группе $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и имеет те же генераторы и те же операторы Казимира, что и $\mathscr{P}_+^\uparrow$. В зависимости от значений оператора P^2 представления группы $\mathscr{P}_0$ могут быть разделены на следующие классы:

1) $P^2 = m^2 > 0$.

1а) $\varepsilon = 1$ (т. е. $P_0 > 0$). Соответствующие представления описывают трансформац. свойства реальных частиц с массой покоя m.

1б) $\varepsilon = -1$ (т. е. $P_0 < 0$). Эти представления комплексно сопряжены с представлениями класса 1а.

2) $P^2 = 0$, $P \neq 0$.

2а) $\varepsilon = 1$ ($P_0 > 0$). Соответствующие представления описывают частицы с нулевой массой покоя (нейтрино и фотон).

2б) $\varepsilon = -1$ ($P_0 < 0$). Представления этого класса комплексно сопряжены с представлениями класса 2а.

3) $P^2 = -m^2 < 0$ (т. е. вектор P пространственно подобен). Согласно осн. принципам релятивистской механики, частицы с таким импульсом не могут реально существовать. Однако представления класса 3 также встречаются в квантовой теории поля, напр. при описании трансформац. свойств взаимодействующих полей.

4) $P = 0$. Все состояния с таким P трансляционно инвариантны. Все унитарные представления этого класса, кроме единичного, бесконечномерны. Единичное представление соответствует вакууму, инвариантному относительно всех преобразований из П. г.

Физ. смысл инварианта w^2 выявляется просто при $m^2 > 0$, $P_0 > 0$. В этом случае величина $-w^2/m^2$ равна квадрату угл. момента $\boldsymbol{M}^2$ в состоянии покоя, т. е. квадрату спина.

Т. о., неприводимое унитарное представление П. г. характеризуется значениями массы m, спина S и знака энергии (при $m^2 > 0$).

Лит.: Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; Новожилов Ю. В., Введение в теорию элементарных частиц, М., 1972; Мишель Л., Шааф М., Симметрия в квантовой физике, пер. с англ., М., 1974; Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980; Эллиот Дж., Добер П., Симметрия в физике, пер. с англ., т. 1—2, М., 1983.

С. И. Азаков.

ПУАНКАРЕ́ ТЕОРЕ́МА о возвращении — одна из осн. теорем, характеризующих поведение *динамической системы* с инвариантной мерой. Примером такой системы является *гамильтонова система*, эволюция к-рой описывается решениями *Гамильтона уравнений* $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$ [q_i и p_i — канонич. координаты и импульсы; $i = 1, \ldots, n$; $H = H(p, q)$ — *Гамильтона функция*; точкой обозначено дифференцирование по времени t]. Инвариантной (сохраняющейся при эволюции) мерой служит объём $\int\limits_A \prod\limits_{i=1}^{n} dp_i dq_i$ области A в фазовом пространстве M, сохраняющийся в соответствии с *Лиувилля теоремой*. Согласно П. т., через любую окрестность U любой точки $\boldsymbol{x} = (p_i, q_i)$, принадлежащей инвариантному множеству конечной положительной меры из M, проходит траектория, к-рая возвращается в U. П. т. доказана А. Пуанкаре в 1890.

Общая динамич. система описывается однопараметрич. группой отображений f^t фазового пространства на себя: для точки $\boldsymbol{x}$ из M $f^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(t)$, причём $f^{t_1+t_2}(\boldsymbol{x}) = f^{t_2}(f^{t_1}(\boldsymbol{x}))$, $f^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0$. В общем случае M — нек-рое пространство с мерой μ, инвариантность к-рой означает, что $\mu(f^t(A)) = \mu(A)$ для любой области A из M. Напр., если $f^t(\boldsymbol{x})$ — решение системы дифференц. ур-ний $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(x)$ с нач. условием $f^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0$, то инвариантная мера $\mu(A) = \int\limits_A \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, где $\rho(\boldsymbol{x})$ — неотрицат. решение *Лиувилля уравнения* $\mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})) = 0$. Если ф-ция Гамильтона H не зависит от времени явно, она сохраняется, а траектории не покидают поверхность уровня M_c: $H(p, q) = c$ в M. При $\mathrm{grad}\, H \neq 0$ на M_c инвариантная мера на поверхности уровня задаётся соотношением $d\mu = d\sigma/|\mathrm{grad} H|$, где $d\sigma$ — элемент объёма на M_c.

В общем случае П. т. утверждает, что у динамич. системы с конечной инвариантной мерой для почти всех точек $\boldsymbol{x} \in A$ при $\mu(A) > 0$ траектория $f^t(\boldsymbol{x})$ возвращается в A: найдётся такое $\tau > 1$, что $f^\tau(\boldsymbol{x}) \in A$. При нек-рых предположениях относительно M П. т. усиливается: траектории возвращаются в A бесконечное число раз, т. е. устойчивы по Пуассону.

Примеры: в гамильтоновой системе ур-ний $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x - x^3$ все траектории, кроме траекторий, лежащих на уровне $H = 0$, $H = (y^2 - x^2 + x^4/_2)/2$, являются периодическими, поэтому возвращаются в любую свою окрестность. Отображение f тора T^2 с координатами (φ, ψ) (mod 2π), задаваемое соотношением $(\varphi, \psi) \to \to (2\varphi + \psi, \varphi + \psi)$, сохраняет площадь. Здесь периодических точек счётное множество, а через множество полной меры проходят траектории, не являющиеся периодическими, но устойчивые по Пуассону.

Пусть F — любая непрерывная ф-ция на фазовом пространстве M динамич. системы f^t, удовлетворяющей условиям П. т. Тогда для почти всякой точки $\boldsymbol{x} \in M$ и любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность значений $t_n \to \infty$, для к-рой $|F(\boldsymbol{x}) - F(f^{t_n}(\boldsymbol{x}))| < \varepsilon$, т. е. значение $F(\boldsymbol{x})$ при движении вдоль траектории повторяется с любой заданной точностью. На это утверждение опирается известный парадокс классич. статистич. механики (парадокс возвратов Пуанкаре — Цермело), однако, строго говоря, ни одна из используемых для построения этого парадокса ф-ций (энтропия и т. д.) не является ф-цией на фазовом пространстве.

Лит.: Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979.

Л. М. Лерман.

Явление выхода и возвращения точек области A в заданное с определ. точностью микроскопич. состояние — слишком нерегулярный процесс, чтобы его можно было оценить одним характерным временем, называемым временем возвращения Пуанкаре. Ср. время возвращения (цикл Пуанкаре)

$$Q_\tau^* = \tau/\mu(A),$$

где τ — промежуток между измерениями; инвариантная мера $\mu(A) = \int |\mathrm{grad} H(p, q)|^{-1} d\sigma$, где интегрирование проводится по изоэнергетич. поверхности $H(p, q) = \mathrm{const}$.

П. т. не даёт конструктивного построения самого возвращения и нуждается в его реализации с помощью нек-рого случайного процесса. Ср. время возвращения удалось оценить М. Смолуховскому (M. Smoluchowski, 1915) с помощью случайного процесса, моделирующего *броуновское движение*. Он показал, что цикл Пуанкаре значительно больше вероятного времени возвращения наблюдаемого макроскопич. состояния в исходное равновесное состояние.

П. т. рассматривает динамич. системы со строго фиксиров. энергией $\mathscr{E}$. В статистич. физике им соответствуют системы, описываемые микроканонич. распределением Гиббса (см. *Гиббса распределения*). Энергия этих систем задана с точностью $\Delta\mathscr{E} \ll \mathscr{E}$ ($\Delta\mathscr{E}$ можно принять равной ср. *флуктуации* энергии). Число состояний, находящихся в слое $\Delta\mathscr{E}$ [определяемое статистич. весом $W(\mathscr{E}, V, N)$, где N — число частиц, V — объём], чрезвычайно велико. Аналогичное рассмотрение возможно и для др. ансамблей Гиббса.

Реальное время возвращения системы из неравновесного состояния к статистич. равновесию может быть оценено на основании *Онсагера гипотезы*, предполагаю-