СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — замкнутая невырожденная *дифференциальная форма* степени 2. *Многообразие*, снабжённое С. с., наз. *симплектическим многообразием*. В каждом касательном пространстве С. с. задаёт кососкалярное произведение (см. в ст. *Симплектическая группа*). Кососкалярное произведение $\langle v,w\rangle$ пары векторов можно принять за определение площади натянутого на них параллелограмма. Поэтому на симплектич. многообразии определена площадь 2-мерных ориентированных поверхностей. Условие замкнутости С. с. связывает кососкалярные произведения в соседних касательных пространствах таким образом, что (ориентированная) площадь (малой) замкнутой поверхности нулевая. Условие невырожденности кососкалярного произведения позволяет отождествить на симплектич. многообразии векторы и ковекторы (линейные ф-ции от векторов): $v \leftrightarrow \langle\cdot,v\rangle$. Оба условия вместе делают локальную геометрию С. с. универсальной (теорема Дарбу): в окрестности любой точки существуют координаты $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, называемые координатами Дарбу, в к-рых С. с. принимают вид $dp_1\wedge dq_1 + \ldots + dp_n\wedge dq_n$. Для сравнения заметим, что в *римановой геометрии* риманова метрика $\sum g_{ij}(x)dx_i dx_j$ (скалярное произведение в касательных пространствах) приводится в подходящих локальных координатах к виду $(dx_1)^2 + \ldots + (dx_n)^2$ лишь с точностью до членов 2-го порядка малости: $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2)$ (последние определяют *кривизны* риманова многообразия в данной точке).

С. с. естественным образом возникают в классич. механике, а также в комплексной геометрии. Пусть M^n — n-мерное комплексное многообразие, G — эрмитова метрика на нём (т. е. эрмитово скалярное произведение в касательных пространствах). Если рассматривать M как $2n$-мерное вещественное многообразие, то $g = \mathrm{Re}G$ задаёт евклидово скалярное, а $\omega = \mathrm{Im}G$ — кососкалярное произведение в касательных пространствах. Эрмитова метрика G наз. кэлеровой структурой, если ω является С. с., т. е. замкнута: $d\omega = 0$. Последнее условие необходимо и достаточно для того, чтобы эрмитова метрика G в подходящих локальных комплексных координатах приводилась к виду $\sum[|dz_i|^2 + O(|z|^2)]$.

Примеры. 1) Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ по определению состоит из всех комплексных одномерных подпространств в $\mathbb{C}^{n+1}$. Касательное пространство $T_x\mathbb{C}P^n$ отождествляется с эрмитово-ортогональной гиперплоскостью к прямой x относительно эрмитовой формы $\sum z_k\bar{w}_k$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Форма $\sum z_k\bar{w}_k$, рассматриваемая на этой гиперплоскости, задаёт эрмитову форму в касательном пространстве к $\mathbb{C}P^n$ в точке x. Такие формы, определённые во всех точках $\mathbb{C}P^n$, задают эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$. Эта метрика кэлерова и называется метрикой Фубини — Штуди.

2) Комплексное алгебраич. многообразие — это комплексное подмногообразие в комплексном проективном пространстве. Ограничение метрики Фубини — Штуди на такое подмногообразие наделяет его кэлеровой структурой. В частности, алгебраич. многообразия обладают С. с. Более общо, комплексное подмногообразие кэлерова многообразия само кэлерово.

3) Гиперкэлерова структура (на $4n$-мерном вещественном многообразии) состоит из трёх комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих соотношениям для образующих алгебры *кватернионов* $\mathbb{H}$, и такой метрики Дирака $\langle,\rangle$, что соответствующие кососкалярные произведения ω_I, ω_J, ω_K замкнуты. Т. о., касательные пространства к гиперкэлерову многообразию несут структуру кватернионного пространства, а само многообразие — риманову метрику, согласованную с тремя вещественными С. с., или в комплексной интерпретации — три кэлеровы структуры Z_I, Z_J, Z_K и три комплексные С. с. W_I, W_J, W_K.

Отметим, что риманова метрика на 4-мерном ($n = 1$) гиперкэлеровом многообразии имеет антиавтодуальную форму кривизны и автоматически удовлетворяет ур-нию Эйнштейна (см. *Тяготение*). Само гиперкэлерово многообразие наз. в этом случае гравитац. *инстантоном*, чем подчёркивается, что речь идёт не о метрике Минковского, а о евклидовой версии общей теории относительности.

Лит. см. при ст. *Симплектическое многообразие*.

А. Б. Гивенталь.

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — *многообразие*, снабжённое *симплектической структурой*. С. м. играют фундам. роль в классич., статистич. и квантовой механике, поскольку симплектич. структура оказывается естественной геом. структурой фазовых пространств *гамильтоновых систем*. Все атрибуты *гамильтонова формализма* переносятся на любое С. м., а координаты Дарбу являются канонич. переменными.

Примеры. 1) Фазовое пространство. Пусть X — конфигурац. пространство механич. системы, $M = T^*X$ — его кокасательное *расслоение*. Локальные координаты в M — это обобщённые координаты $(q_1, \ldots, q_n)$ точки q на X и обобщённые импульсы $(p_1, \ldots, p_n)$ (координаты ковектора p из кокасательного пространства в точке q). Дифференциальная 1-форма $\alpha = \sum p_i dq_i$ наз. формой Лиувилля и допускает инвариантное определение: её значение на касательном векторе v к M в точке (p, q) задаётся как значение ковектора p на образе вектора v при проекции $T^*X \to X$. Симплектич. структура ω на M определяется как дифференциал формы Лиувилля: $\omega = d\alpha = \sum dp_i\wedge dq_i$.

2) Картина Шрёдингера — подход, основанный на гамильтоновом векторном поле. Гамильтониан H (ф-ция на С. м.) задаёт векторное поле v_H по правилу: отвечающее v_H поле ковекторов должно совпадать с дифференциалом dH ф-ции Гамильтона. Движение фазовой точки со скоростью v_H описывается системой дифференциальных ур-ний, к-рая в координатах Дарбу принимает вид ур-ний Гамильтона:

$$\dot{p} = -H_q, \quad \dot{q} = H_p.$$

3) Картина Гейзенберга — подход, основанный на алгебре ф-ций. Ф-ла $\{F,G\} = \langle v_F, v_G\rangle$ задаёт *Пуассона скобку* в пространстве ф-ций на С. м. В координатах Дарбу $\{F,G\} = F_pG_q - F_qG_p$. Геом. интерпретация функции $\{H,F\}$ как производной ф-ции F вдоль потока поля v_H означает, что картина Шрёдингера эквивалентна картине Гейзенберга: физ. величины (ф-ции на фазовом пространстве) меняются во времени согласно ур-нию $\dot{F} = \{H,F\}$. Из этой эквивалентности вытекают осн. свойства законов сохранения: сохранение энергии ($\{H,H\} = 0$); *Нётер теорема* — если поток поля v_F сохраняет ф-цию Гамильтона H, то F — первый интеграл потока v_H($\{F,H\} = 0 \Rightarrow \{H,F\} = 0$); теорема Пуассона — скобка Пуассона $\{F,G\}$ первых интегралов снова первый интеграл (это следует из тождества Якоби).

Если же в пространстве ф-ций на многообразии задана скобка Пуассона, то многообразие разбивается в объединение С. м., называемых симплектич. слоями. Это один из способов строить примеры С. м., пополняя, в частности, запас физ. моделей.

4) Статистич. механика. Поток векторного поля на С. м. сохраняет симплектич. структуру ω, если и только если это поле локально гамильтоново. В частности, его поток сохраняет фазовый объём $\omega^n = \omega\wedge\ldots\wedge\omega$ (n — число степеней свободы). Этот факт лежит в основе статистич. механики. Эволюция фазовой плотности $\rho\omega^n$ под действием потока поля v_H удовлетворяет ур-нию Лиувилля, $\dot{\rho} = \{\rho,H\}$. Отсюда вытекает, напр., стацио-