нарность распределения Гиббса $\exp(-\beta H)\omega^n$. В координатах Дарбу

$$\omega^n = n!\,dp_1 \wedge dq_1 \dots dp_n \wedge dq_n.$$

5) Классич. подход к спину. Векторное произведение в 3-мерном евклидовом пространстве порождает скобку Пуассона ф-ций на нём. Симплектич. слои в данном примере — концентрич. сферы, снабжённые элементом площади. *Вращений группа* сохраняет площади и потому действует на сфере потоками гамильтоновых векторных полей. Гамильтонианы действия — линейные ф-ции в пространстве. Квантование этого действия возможно лишь на сферах целочисленной площади (в единицах $\hbar$) и приводит к неприводимым *представлениям группы* вращений — как «векторным», так и «спинорным».

6) Принцип наименьшего действия. Двум траекториям в С. м. с общими концами сопоставим симплектич. площадь соединяющей их 2-мерной плёнки. Эта площадь по существу не зависит от плёнки (замкнутость симплектич. структуры!) и определяет поэтому функционал, называемый действием, на пространстве таких траекторий (он определён с точностью до постоянного слагаемого). Экстремали функционала действия в классе траекторий на поверхности фиксиров. уровня гамильтониана H суть в точности траектории поля v_H (следствие косоортогональности поля v_H к уровням $H = \text{const}$). Этот геом. вариационный принцип — прототип всех вариац. принципов матем. физики.

Имеется и обратная связь — пространство экстремалей вариац. задачи, как правило, несёт естественную симплектич. структуру. Последнее обстоятельство лежит в основе перехода от *лагранжева формализма* к гамильтонову, а также даёт ещё один способ пополнять запас примеров С. м.

7) Теория Дирака. К гамильтонову формализму со связями обычно приходят, отправляясь от *лагранжиана*, вырожденного по скоростям (определитель матрицы производных лагранжиана по скоростям равен нулю). Требование непротиворечивости динамич. ур-ний означает, что подмногообразие связей F в С. м. M инволютивно: пространство J связей (ф-ций на M, нулевых на F) замкнуто относительно скобки Пуассона ($\{J,J\} \subset J$). Поток векторного поля, отвечающего гамильтониану H, сохраняет F, если $\{H,J\} \subset J$. Все такие гамильтонианы образуют замкнутую относительно скобки Пуассона алгебру A. Физ. величины — это элементы фактор-алгебры A/J. Их можно воспринимать как ф-ции на физ. фазовом пространстве B — базе нек-рого расслоения $F \to B$. Скобка Пуассона в A/J наделяет B симплектич. структурой. Эта конструкция используется в калибровочно инвариантных теориях (см. *Калибровочная инвариантность*), где вместо проекции из F в B обычно фиксируют «калибровку», т. е. сечение расслоения $F \to B$ в качестве физ. фазового пространства.

8) Ур-ние Эйлера (для твёрдого тела). Если действие группы Ли G на С. м. M сохраняет симплектич. структуру, то алгебра $\mathscr{A}$ G-инвариантных ф-ций на M замкнута относительно скобки Пуассона. Рассматривая $\mathscr{A}$ как алгебру ф-ций на многообразии A, получаем разбиение A на симплектич. слои, а также проекцию $M \to A$, сохраняющую скобки Пуассона. На этой конструкции основано понижение порядка симметричных гамильтоновых систем: траектории на M G-инвариантного поля v_H проектируются в траектории гамильтонова потока на слоях в A с гамильтонианом $H \in \mathscr{A}$. Таким способом возникает, напр., ур-ние Эйлера, $\dot{m} = [m\omega]$, описывающее эволюцию вектора момента импульса во внутр. координатах твёрдого тела при его свободном вращении. Здесь G — группа вращений, $M = T^*G$ — её кокасательное расслоение, действие G на M задаётся сдвигами на группе, а проекция $M \to A = M/G$ совпадает с отображением момента $T^*G \to \mathfrak{G}^*$ в двойственное пространство алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Скобка Пуассона в $\mathscr{A}$ порождается коммутатором в $\mathfrak{G}$. Симплектич. слои в $\mathfrak{G}^*$ — это орбиты коприсоединённого представления группы G. Тензор инерции тела интерпретируется как оператор Q: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^*$ и устанавливает связь вектора угл. скорости $\boldsymbol{\omega}$ с вектором момента $\boldsymbol{m} = Q\boldsymbol{\omega}$ и задаёт на $\mathfrak{G}^*$ квадратичный гамильтониан $H = (m|Q^{-1}\,m)$.

Аналогичная конструкция с группой G сохраняющих объём диффеоморфизмов приводит к ур-нию вихря $d(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})/dt = [\boldsymbol{v},\mathrm{rot}\boldsymbol{v}]$ в теории свободного течения идеальной жидкости, где роль порождающего гамильтониан оператора инерции выполняет ротор.

Отображение момента $T^*G \to \mathfrak{G}^*$ играет фундам. роль в современной теории вполне интегрируемых систем. В частности, один из подходов к интегрированию *Кортевега — де Фриса уравнения* основан на его интерпретации как ур-ния Эйлера на орбите коприсоединённого представления в двойственном пространстве алгебры Вирасоро.

Лит.: Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 3 изд., М., 1989; Арнольд В. И., Гивенталь А. Б., Симплектическая геометрия, в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 4, М., 1985, с. 5; Кириллов А. А., Геометрическое квантование, там же, с. 141.

А. Б. Гивенталь.

СИНГЛЕТЫ (от англ. single — одиночный) — одиночные спектральные линии в атомных спектрах, соответствующие разрешённым квантовым переходам между синглетными уровнями энергии (см. *Мультиплетность*). Синглетные линии составляют, напр., гл. *спектральную серию* атомов щёлочноземельных элементов.

СИНГОНИЯ кристаллическая — подразделение кристаллов по симметрии формы их *элементарной ячейки* (элементарного параллелепипеда повторяемости), или, что то же самое, по точечной симметрии узлов кристаллич. решётки. С. характеризуется определёнными соотношениями между периодами элементарной ячейки a, b, c и углами между ними α, β, γ (см. *Симметрия кристаллов*). Всего существует 7 С. — триклинная, моноклинная, ромбическая, тетрагональная, тригональная, гексагональная, кубическая.

В. К. Вайнштейн.

СИНГУЛЯРНОСТЬ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ (от лат. singularis — отдельный, особый) — состояние нашей *Вселенной* в определённый момент времени в прошлом, когда плотность энергии материи ε и кривизна пространства-времени были очень велики — порядка планковских значений ($\varepsilon \sim \varepsilon_{\text{пл}} = c^7/G^2\hbar \sim 10^{114}$ эрг/см^3, $|R^{iklm}R_{iklm}| \sim c^6/G^2\hbar^2 \sim 10^{131}$ см$^{-4}$, где R_{iklm} — *кривизны тензор*) — физическая сингулярность, или даже бесконечны — математическая С. к. Это состояние, вместе с последующим этапом эволюции Вселенной, пока плотность энергии материи оставалась высокой, называют также Большим Взрывом.

Тот факт, что Вселенная в прошлом проходила через состояние с темп-рой $T \sim 10^3$ К, следует из существования в настоящее время изотропного *микроволнового фонового излучения* (реликтового излучения) со строго тепловым (планковским) спектром, а наличие темп-р $T \sim 10^9$–10^{10} К (100 кэВ — 1 МэВ) в ещё более ранний момент — из теории космологич. *нуклеосинтеза*, дающей правильные значения для наблюдаемых концентраций дейтерия, гелия-3, гелия-4 и лития-7. Дальнейшая экстраполяция в прошлое, в область более высоких энергий, плотностей энергии и темп-р, следует из ур-ний классич. теории гравитации — общей теории относительности (см. *Тяготение*). Согласно этой теории, С. к. есть частный случай сингулярностей (особенностей), возникающих в решениях ур-ний Эйнштейна, а существование матем. С. к. неизбежно следует из факта изотропного расширения наблюдаемой части Вселенной в настоящее время и существования релик-