лучше разделяет гипотезы. Критерий наз. несмещённым, если для любой альтернативной гипотезы H_1 критич. область выбрана так, что $P(x \in \omega \mid H_1) \geqslant \alpha$.

Если гипотеза H_0 или H_1 (или обе) не являются полностью определёнными (сложные гипотезы), то не существует оптим. метода конструирования наилучшего критерия. На практике в качестве проверочной статистики обычно используется отношение максимумов правдоподобия [2].

Лит.: 1) Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; 2) Статистические методы в экспериментальной физике, пер. с англ., М., 1976; 3) Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

В. П. Жигунов, С. В. Клименко.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР (матрица плотности) — оператор, с помощью к-рого можно вычислить ср. значение любой физ. величины в квантовой механике и квантовой статистич. физике. С. о. описывает состояние системы, не основанное на полном (в смысле квантовой механики) наборе данных о системе (*смешанное состояние*). Подробнее см. *Матрица плотности.*

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ — один из осн. разделов матем. статистики, посвящённый оцениванию параметров теоретич. моделей по косвенным измерениям или *распределений* случайной величины x по наблюдению её реализаций. Если предполагается, что распределение является элементом параметрич. семейства $p(x|a)$, то возникает задача параметрического оценивания. Когда вид распределения неизвестен, говорят о задаче непараметрического оценивания. При параметрич. оценивании различают два подхода: точечное оценивание и *интервальное оценивание*.

Точечное оценивание. Пусть распределение случайной величины x — заданная ф-ция $p(x|a)$ с неизвестными параметрами a, а $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ — вектор возможных значений x. Точечное оценивание заключается в выборе ф-ции $\hat{a}_N=\hat{a}(x)$, значение к-рой при заданном x можно использовать вместо параметра a в качестве его приближённого значения. Ф-цию $\hat{a}(x)$ наз. оценкой параметра a, принцип выбора ф-ции — методом оценивания. Очевидно, что можно предложить много оценок, поэтому необходимо изучить следующие осн. свойства оценок.

Состоятельность. При увеличении объёма N наблюдений (измерений) оценка должна приближаться к истинному значению параметра. Оценку $\hat{a}_N$ называют состоятельной по вероятности, если для любых ε, $\eta>0$ существует такое N, что вероятность реализации неравенства $|\hat{a}_N-a|>\varepsilon|$ будет меньше η. Примером состоятельной оценки служит выборочное среднее $\hat{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N$, к-рое является оценкой ср. значения величины $\bar{x}=\int dx x p(x)$, если ф-ция плотности вероятности $p(x)$ имеет конечную *дисперсию*.

Смещение. Под смещением оценки $\hat{a}_N$ принято понимать отклонение её ср. значения $\overline{\hat{a}}_N(x)$ от истинного значения a: $b_N(\hat{a}_N)=\overline{\hat{a}}_N-a$. Оценку $\hat{a}_N$ наз. несмещённой, если при любых N и a имеем $b_N(\hat{a}_N)=0$, или $\overline{\hat{a}}_N=a$. Несмещённая оценка обычно предпочтительнее смещённой, т. к. смещение является систематич. ошибкой в оценке, к-рая зависит от истинного значения параметра a и поэтому редко поддаётся вычислению. Выборочное среднее является несмещённой оценкой, тогда как выборочная дисперсия $\hat{s}^2=\sum_n(x_n-\bar{\hat{x}})^2/N$ является смещённой оценкой дисперсии σ^2.

Эффективность. Простейшей характеристикой точности оценки является ср. значение квадрата её расстояния от истинного значения:

$$\overline{d^2(\hat{a}_N)}=\mathrm{M}\{(\hat{a}_N-a)^2\}=\mathrm{D}(\hat{a}_N)+b_N^2,$$

где $\mathrm{D}(\hat{a}_N)$ — дисперсия оценки $\hat{a}_N$, равная

$$\mathrm{D}(a_N)=\mathrm{M}\{[\hat{a}_N-\mathrm{M}(\hat{a}_N)]^2\}.$$

Дисперсия характеризует «ширину» распределения, т. е. «шумовую» составляющую ошибки $d^2(\hat{a}_N)$ оценки $\hat{a}_N$. Поэтому в классе оценок с данным смещением b_N предпочтительнее оценка с мин. дисперсией. Справедливо неравенство Крамера — Рао:

$$\mathrm{D}(\hat{a}_N)\geqslant[1+db/da]^2/I_{\hat{a}_N}(a)\geqslant[1+db/da]^2/I_x(a), \quad (1)$$

к-рое и определяет максимально достижимую точность (в смысле $d^2(\hat{a}_N)$ в классе оценок с данным смещением b_N по выборке x. Величину

$$I_{\hat{a}_N}(a)=\mathrm{M}\left\{\left(\frac{\partial \ln q}{\partial a}\right)^2\right\}=-\mathrm{M}\left\{\frac{\partial^2 \ln q}{\partial a^2}\right\},$$

где $q(\hat{a}_N|a)$ — ф-ция плотности распределения $\hat{a}_N$, называют количеством информации по Р. Фишеру (R. Fisher) о параметре a в оценке $\hat{a}_N(x)$. Величину

$$I_x(a)=\mathrm{M}\left\{\left(\frac{\partial \ln L}{\partial a}\right)^2\right\}=-\mathrm{M}\left\{\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right\}, \quad (2)$$

где $L(a|x)=\prod_n p(x_n|a)$ — ф-ция правдоподобия, а $p(x|a)$ — плотность ф-ции распределения x, называют количеством информации по Р. Фишеру о параметре в выборке x. В классе несмещённых оценок

$$\mathrm{D}(\hat{a}_N)\geqslant 1/I_{\hat{a}_N}(a)\geqslant 1/I_x(a) \quad (3)$$

и информац. смысл величин $I_{\hat{a}_N}(a)$ и $I_x(a)$ становится очевидным: их значение определяет минимально достижимое расстояние $\hat{a}_N(x)$ от a. Первое неравенство в (1), (3) превращается в равенство лишь тогда, когда ф-ция плотности распределения оценки имеет экспоненц. форму:

$$q(\hat{a}|a)=\exp[A(\hat{a})a+B(\hat{a})+C(a)]. \quad (4)$$

Если

$$I_{\hat{a}_N}(a)=I_x(a), \quad (5)$$

то и второе неравенство в (1), (3) превращается в равенство. Такую оценку называют эффективной в смысле Крамера — Рао. Оценку, для к-рой выполняется равенство (5), т. е. такую, в к-рой количество информации о параметре a такое же, как в самой выборке x, называют достаточной статистикой. Условием существования достаточной статистики $\hat{a}(x)$ является факторизация ф-ции правдоподобия: $L(a\mid x)=g(a,\hat{a})h(\hat{a},x)$. Неравенство Крамера — Рао полезно тем, что позволяет ещё на стадии *планирования эксперимента* оценить максимально достижимую точность «измерения» параметров изучаемых распределений.

Требования (3) и (4) являются достаточно жёсткими, поэтому при конечных N эфф. оценки редки. В связи с этим рассматривают поведение $\mathrm{D}(\hat{a}_N)$ при $N\to\infty$ и наз. оценку асимптотически эффективной, если при $N\to\infty$ $\mathrm{D}(\hat{a}_N)I_x(a)\to 1$. Заметим, что асимптотич. несмещённость следует из состоятельности оценки. Рассмотрим наиб. общие и распространённые методы получения точечных оценок.

Метод максимума правдоподобия (подробнее см. *Максимального правдоподобия метод*).