

**Фрактальная размерность.** Всё разнообразие статистич. свойств случайного сигнала, порождаемого динамич. системой со С. а., может быть описано, если известно распределение вероятности состояний системы. Однако получить (и использовать) это распределение для конкретных систем со С. а. чрезвычайно сложно (хотя бы потому, что плотность распределения инвариантной вероятностной меры всегда сингулярна). Это одна из причин, по к-рой для описания С. а. и сопоставления его свойств со свойствами реального сигнала используют разл. рода усредненные характеристики. Наиб. широко используемыми являются всевозможные размерностные характеристики, в частности фрактальная размерность (см. также [2-4])

$$\bar{c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (2)$$

где  $\varepsilon > 0$ , нек-рый фиксированный параметр,  $N(\varepsilon)$  — число  $n$ -мерных шаров диаметра  $\varepsilon$ , покрывающих С. а. динамич. системы с  $n$ -мерным фазовым пространством. Определенная согласно ур-нию (2) размерность  $\bar{c}$  не может, очевидно, превышать  $n$ , но может быть меньше  $n$  ( $n$ -мерные шары могут оказаться почти пустыми). Для «обычных» множеств ур-ние (2) даёт очевидные результаты. Так, для множества из  $k$  точек  $N(\varepsilon) = k$ ,  $\bar{c} = 0$ ; для отрезка длины  $L$  прямой линии  $N(\varepsilon) \sim L/\varepsilon$ ,  $\bar{c} = 1$ ; для куска площади  $S$  двумерной поверхности  $N(\varepsilon) \sim S/\varepsilon^2$ ,  $\bar{c} = 2$  и т. д. Неравенство размерности целому числу соответствует сложному геом. устройству. Для генератора, изображённого на рис. 1, размерность соответствующего аттрактора системы (1) в широком диапазоне изменения параметров остаётся заключённой в интервале (2,3 ÷ 2,6).

С физ. точки зрения, осн. «достоинство» фрактальной размерности С. а. в том, что она даёт оценку эфф. числа степеней свободы, формирующих установившийся (после окончания всех переходных процессов) стохастич. сигнал. Более строгое соотношение между размерностью  $\bar{c}$  и числом степеней свободы  $m$  имеет вид:  $m \leq (2\bar{c} + 1)2$ .

**Бифуркации странных аттракторов.** Пути рождения стохастич. автоколебаний при изменении управляющего параметра (напр., коэф. усиления в генераторе рис. 1) зависят от конкретных свойств исследуемой системы. Однако как и предельный цикл, к-рый может родиться лишь несколькими типичными способами, так и С. а. обладают сравнительно небольшим числом набл. типичных возможностей возникновения [1,4-6].

**Сценарий Фейгенбаума** — цепочка бифуркаций удвоения периода устойчивого предельного цикла. Если при изменении управляющего параметра периодич. движение теряет устойчивость, то вместо него может возникнуть др. устойчивое движение (напр., квазипериодическое, лежащее на притягивающем двумерном торе) либо предельный цикл удвоенного периода; последнему случаю соответствует переход мультипликатора через  $(-1)$ . В  $n$ -мерном фазовом пространстве поведение траекторий отображения Пуанкаре в окрестности претерпевающего бифуркацию удвоения периода предельного цикла определяется ф-цией, напр.,  $f(x)$ , график к-рой похож на параболу. Эта ф-ция описывает связь между координатами в направлении собств. подпространства оператора линеаризации отображения Пуанкаре, отвечающего мультипликатору  $(-1)$  ( $j+1$ )-го и  $j$ -го пересечений траекторией системы с текущей Пуанкаре:  $x_{j+1} = f(x_j)$ . Возникшему устойчивому предельному циклу удвоенного периода отвечает двупериодич. траектория отображения  $f$ . При дальнейшем изменении параметра бифуркации удвоения периода бесконечно повторяются, а бифуркац. значения, напр.,  $\lambda_n$  накапливаются к критич. точке  $\lambda_\infty$ , отвечающей возникновению С. а. В соответствии со сценарием Фейгенбаума имеет место универсальный (не зависящий от конкретной системы) закон

$$(\lambda_\infty - \lambda_n)/(\lambda_\infty - \lambda_{n+1}) \sim \delta,$$

где  $\delta = 4,6692\dots$  — универсальная константа Фейгенбаума (см. Фейгенбаума универсальность).

Родившемуся С. а. при фиксированном  $\lambda > \lambda_\infty$  отвечает неск. интервалов на оси  $x$ ; участки между этими интервалами содержат притягивающиеся к аттрактору траектории, а также  $2^m$ -периодические (относительно отображения  $f$ ), неустойчивые предельные циклы, начиная с нек-рого  $m_0$  и меньше. При увеличении параметра  $\lambda$  скорость разбегания траекторий на С. а. увеличивается, и он «разбухает», последовательно поглощая неустойчивые предельные циклы периодов  $2^{m+1}$ ,  $2^m, \dots$  При этом число отрезков, отвечающих аттрактору, уменьшается, а их длины увеличиваются. Возникает как бы обратный каскад последоват. упрощений аттрактора. Рис. 6 иллюстрирует этот процесс для

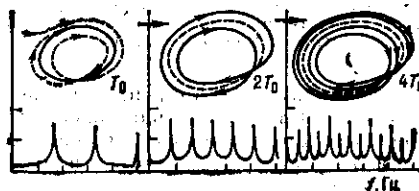


Рис. 6. «Обратные бифуркации» удвоения периода, иллюстрирующие разбухание аттрактора, возникшего по сценарию Фейгенбаума.

двух последних бифуркаций. На рис. 6а «лента» аттрактора совершает 4 оборота, после бифуркации она становится двухоборотной и затем, после следующей бифуркации, замыкается на себя всего через один оборот, предварительно перекутившись (6б и 6в).

**Перемена жемчужины.** Во мн. случаях при прохождении управляющего параметра (скажем,  $\lambda$ ) через бифуркац. значение  $\lambda_*$  переход к стохастич. автоколебаниям внешне осуществляется как редкое нарушение регулярных колебаний «стохастич. всплесками». При этом длительность ламинарной (регулярной) фазы тем больше, чем меньше надкритичность  $\lambda - \lambda_* > 0$ . С ростом же надкритичности длительность регулярной фазы сокращается. Эта картина интерпретируется следующей эволюцией осн. объектов в фазовом пространстве, определяющих бифуркации (предельные циклы, сепаратрисы седловых периодич. траекторий и пр.). В момент бифуркации сливаются и исчезают отвечающий автоколебаниям устойчивый предельный цикл и седловая периодич. траектория. При малой надкритичности все траектории, стремившиеся ранее к устойчивому предельному циклу, долгое время сохраняют характер своего поведения, т. е. демонстрируют движение, близкое к периодическому. С течением времени [ $t \sim (\lambda - \lambda_*)^{-1/2}$ ] они «замечают», что старый аттрактор исчез, и, оставаясь рядом с сепаратрисой (также исчезнувшей) седлового предельного цикла, уходят в др. часть фазового пространства. Если в докритич. области система была глобально устойчива (т. е. существовал только один притягивающий объект), то эти траектории через нек-рое время вновь попадают в окрестность исчезнувшего предельного цикла. Если при этом в докритич. области значений параметров сепаратриса седлового цикла была вложена в фазовое пространство достаточно сложным геом. образом (образовывала бесконечное число складок — «гофрировалась», содержала гетероклинич. траектории др. седловых циклов и т. п.), то есть переходный процесс демонстрировал нерегулярное поведение, то время попадания в окрестность исчезнувшего цикла уже  $\lambda > \lambda_*$  будет являться случайной величиной. Далее повторяется ламинарная фаза, предшествующая новому, «турбулентному», всплеску и т. д.

Кроме этих основных способов возникновения С. а. достаточно часто встречаются также переходы к хаотич. автоколебаниям через разрушение квазипериодических (в фазовом пространстве при изменении управляющих параметров теряет гладкость и разрушается притягивающий двумерный тор) и комбинированные сценарии [6].