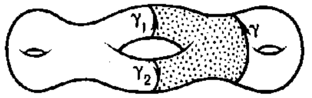

Рис. 6. Гомологичные циклы γ и $\gamma'=\gamma_1-\gamma_2$ (двумерная плёнка между ними заштрихована).

гаемых); для проективной плоскости $H_0(\mathrm{RP}^2;\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $H_1(\mathrm{RP}^2;\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2$ (группа из двух элементов), $H_2(\mathrm{RP}^2;\ \mathbb{Z})=0$. Если в определении гомологий брать линейные комбинации циклов с любыми вещественными коэф., то получаются группы (линейные пространства) $H_k(M;\ \mathbb{R})$ (в качестве коэф. иногда полезно также брать элементы из любой абелевой группы). Ф-ла $(\gamma,\ \omega)=\int\limits_{\gamma}\omega$, где ω — замкнутая k-форма, а γ — k-мерный цикл, определяет [в силу ф-лы Стокса (4)] невырожденное скалярное произведение между пространствами $H_k(M;\ \mathbb{R})$ и $H^k(M;\ \mathbb{R})$. Поэтому эти пространства гомологий и когомологий имеют одинаковую размерность [равную числу Бетти $b_k(M)$].

Более сложные гомотопич. характеристики пространств, возникающие в алгебраич. Т.,— экстраординарные гомологии (напр., бордизмы, K-теория и др. [3]).

Важной сферой применения теории гомологий является вариационное исчисление в целом (этот раздел Т. называют **теорией Морса**). Удаётся выводить существование решений вариационных задач на многообразии из информации о его гомологиях. Обобщение теории Морса на многозначные функционалы найдено в [10] (см. также [3]).

Т. **расслоений** играет важную вспомогат. роль во многих топологич. вычислениях: её задачи имеют также и самостоятельную (в т. ч. прикладную) ценность. Интуитивно, *расслоение* с базой B и слоем F есть семейство одинаковых слоёв F_x, непрерывно зависящих от точки x базы B (F, B — нек-рые пространства, напр. многообразия); объединение E всех слоёв F_x наз. **пространством расслоения**, а отображение $p: E\to B$, переводящее каждую точку слоя F_x в x,— **проекцией расслоения**. Простейшим примером служит прямое произведение $E=F\times B$, где F_x состоит из пар вида $(f,\ x)$, f — точка из F. Более сложный пример — лист Мёбиуса (расслоение с базой окружность и слоем отрезок). Если слой F является дискретным множеством, то расслоение наз. **накрытием**. Напр., отображение $z=e^{2\pi it}$ задаёт накрытие прямой над окружностью $|z|=1$, слоем является совокупность целых чисел. Накрытия — осн. инструмент при вычислении фундам. групп. Более сложные расслоения используются для вычисления гомотопич. групп. Для вычисления гомологий и когомологий расслоений используется техника спектральных последовательностей [3], [11].

Осн. задачей Т. расслоений является задача классификации расслоений. По определению, гомоморфизм $f: E_1\to E_2$ задаёт **эквивалентность** двух расслоений $p_1: E_1\to B$ и $p_2: E_2\to B$, если он сохраняет слои, т. е. $p_2(f(y))\equiv p_1(y)$ для всех y из E_1. Расслоение, эквивалентное прямому произведению, наз. **тривиальным**. Расслоения над евклидовым пространством (без ограничений на поведение в бесконечности) тривиальны; G-расслоения над n-мерной сферой S^n классифицируются элементами гомотопич. группы $\pi_{n-1}(G)$. Топологич. характеристики расслоений наз. **характеристическими классами**. Для расслоений со структурной группой G (где G — группа Ли) характеристич. классы могут быть выражены через кривизну расслоения, определяя тем самым топологич. заряды *связностей* в расслоении (или, эквивалентно, *калибровочных полей*). Напр., единств. топологич. инвариантом, задающим $U(1)$-расслоение над двумерной сферой S^2, является **первый класс Черна (Чжэня)**

$$c_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2}F,$$

где $F=F_{12}\,dx^1\wedge dx^2$ — форма кривизны расслоения; $F_{12}=\partial_1A_2-\partial_2A_1$, а для $SU(2)$-расслоений над 4-мерной сферой S^4 — **второй класс Чжэня**

$$c_2=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S^4}\mathrm{Tr}\,(F\wedge F),$$

где

$$F=\sum_{a<b}F_{ab}\,dx^a\wedge dx^b,\ F_{ab}=\partial_bA_a-\partial_aA_b+i\,[A_a,\ A_b]$$

— матричная форма кривизны расслоения (интегралы нормированы условием целочисленности величин c_1 и c_2).

Осн. топологич. характеристикой эллиптич. оператора является его **индекс**. (Это понятие возникло при исследовании краевых задач теории упругости.) Индексом линейного оператора $A: H_1\to H_2$ [где H_1, H_2 — *гильбертовы пространства*, оператор A должен быть нетеровым, т. е. должен иметь конечномерное ядро — совокупность решений ур-ния $A\psi=0$, и коядро — совокупность решений сопряжённого ур-ния $A^*\psi^*=0$ (здесь $A^*: H_2\to H_1$ — сопряжённый оператор)] называется разность размерностей ядра и коядра. Индекс является гомотопич. инвариантом оператора, не меняясь при деформации A в классе нетеровых операторов. Для эллиптич. оператора на многообразии (условие нетеровости выполнено) теорема об индексе позволяет вычислить индекс оператора через топологич. характеристики многообразия [4]. Это позволяет, в частности, в ряде случаев вычислять размерность пространства решений ур-ния вида $A\psi=0$ (т. е. число нулевых мод оператора A).

Топологич. методы оказываются также весьма полезными в ряде задач качественной теории динамич. систем и слоений: в задачах топологич. классификации таких систем, описания их инвариантных и предельных множеств и др.

Лит.: 1) Фукс Д. Б., Классические многообразия, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 12, М., 1985, с. 253; 2) Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, 2 изд., М., 1986; 3) их же, Современная геометрия. Методы теории гомологий, М., 1984; 4) Шварц А. С., Квантовая теория поля и топология, М., 1989; 5) Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; 6) Witten E., Some geometrical applications of quantum field theory, in: IX International Congress on Mathematical Physics, Bristol — N. Y., 1989, p. 77; 7) Бессе А., Многообразия Эйнштейна, пер. с англ., т. 1—2, М., 1990; 8) Новиков С. П., Аналитический обобщенный инвариант Хопфа. Многозначные функционалы, «Успехи матем. наук», 1984, т. 39, № 5, с. 97; 9) Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И., Комбинаторные вопросы двумерной модели Изинга, «Труды МИАН», 1991, т. 196, с. 51; 10) Новиков С. П., Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса, «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, № 5, с. 3; 11) Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., Курс гомотопической топологии, М., 1989.

Б. А. Дубровин.

ТОПОЛО́ГИЯ ВСЕЛЕ́ННОЙ — топологич. свойства пространственно-временно́го *многообразия*, к-рым описывается Вселенная согласно общей теории относительности и в к-рое вложены негравитац. физ. поля и частицы. Эти свойства не изменяются при любых непрерывных преобразованиях пространства-времени (см. *Топология*). К наиб. общим свойствам Т. В. относятся её размерность и связность. Наблюдаемая размерность Вселенной равна 4 (одна временная и три пространственные координаты), а наблюдаемая связность тривиальна, т. е. видимая часть Вселенной является односвязным пространственно-временным многообразием, в ней нет «дыр» (существование *чёрных дыр*, возникших в результате коллапса звёзд, а также первичных чёрных дыр не ведёт к возникновению неодносвязности в 4-мерном смысле). Это не исключает возможности того, что в очень малых масштабах [порядка планковской длины $l_{Pl}=(Ghc^{-3})^{1/2}\approx10^{-33}$ см] Вселенная может иметь бо́льшую размерность (как это предполагается в теориях типа Калуцы — Клейна или в *суперструн* теори-