

Уравнение Янга — Бакстера. Изотропная модель Гейзенберга является простейшей системой, точное решение k -рой достигается методом анзаца Бете, т. е. представлением волновой ф-ции в виде (3) и (4). Для этой модели рассматривается система взаимодействующих частиц (спиновых отклонений), к-рые не имеют внутр. структуры, и их состояние целиком задаётся их положением в цепочке (координатой); взаимодействие таких частиц сводится лишь к обмену импульсами. В то же время существует немало физ. задач, где состояние отражает и внутр. структуру частиц, т. е. характеризуется нек-рым дискретным индексом α , напр. проекцией спина. При взаимодействии друг с другом такие частицы могут не только обмениваться импульсами, но и менять свой дискретный индекс. Это обстоятельство требует обобщения анзаца Бете.

Рассмотрим систему из N частиц. Пусть $Q = (q_1, \dots, q_N)$ и $P = (p_1, \dots, p_N)$ — перестановки целых чисел $1, \dots, N$. Обобщённый анзац Бете состоит в том, что волновая ф-ция системы $\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(x_1, \dots, x_N)$ для области

$$X_Q = \{x_{q_1} < x_{q_2} < \dots < x_{q_N}\}$$

взаимной расстановки координат частиц имеет вид

$$\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_P A_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(Q|P) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N p_{ij} x_j \right\}. \quad (8)$$

Ф-ции $A(Q|P)$ разл. областей связаны между собой через S -матрицу. Если области X_Q и $X_{\bar{Q}}$ отличаются друг от друга перестановкой i и j частиц, то эту связь в общем виде можно записать в виде соотношения

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots}(\bar{Q}|P) = \sum_{\alpha_i, \alpha_j} S_{\alpha_i, \alpha_j}^{\alpha_i, \alpha_j}(p_i, p_j) A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots}(Q|P). \quad (9)$$

Величина $S_{\alpha_i, \alpha_j}^{\alpha_i, \alpha_j}(p_i, p_j)$ наз. двухчастичной матрицей рассеяния.

Используя многократно правило (9) для перестановки одной пары частиц, мы можем любую перестановку свести к тождественной перестановке $X_I = \{x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$. Коэф. $A(Q|P)$ и $A(I|P)$ будут связаны соотношением, в к-ром стоит произведение S -матриц, отвечающих всем транспозициям пары индексов, к-рые нужно сделать для сведения перестановки \bar{Q} к I . Т. о. возникает многочастичная матрица рассеяния, к-рая оказывается мультипликативной.

Между элементами двухчастичной матрицы рассеяния существует соотношение, играющее центр. роль в теории квантовых одномерных систем. Это соотношение следует из эквивалентности двух возможностей трёхчастичного процесса рассеяния. Используя такую параметризацию импульсов $p_i = p_i(\lambda_i)$, при к-рой матрица рассеяния $S(p_1, p_2)$ будет ф-цией разности бы строт λ_1 и λ_2 , $S(\lambda_1 - \lambda_2)$, соотношение для факторизованной трёхчастичной матрицы можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{\alpha_2, \alpha_1}^{\alpha_1, \alpha_2}(\lambda) S_{\alpha_3, \alpha_1}^{\alpha_1, \alpha_3}(\lambda + \mu) S_{\alpha_3, \alpha_2}^{\alpha_2, \alpha_3}(\mu) = \\ = S_{\alpha_3, \alpha_2}^{\alpha_2, \alpha_3}(\mu) S_{\alpha_3, \alpha_1}^{\alpha_1, \alpha_3}(\lambda + \mu) S_{\alpha_2, \alpha_1}^{\alpha_1, \alpha_2}(\lambda) \end{aligned} \quad (10)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Подобного типа соотношения при точном решении конкретных одномерных задач были получены в 1967 Ч. Янгом [4] и в 1972 Бакстером и наз. уравнениями Янга — Бакстера, а параметр λ (или μ) наз. спектральным параметром.

Квантовый метод обратной задачи. В этом методе одним из центральных объектов является трансфер-матрица T . Она определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\beta_1, \dots, \beta_N}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\lambda) = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_N} S_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma_1, \gamma_1}(\lambda) \times \\ \times S_{\alpha_2, \beta_2}^{\gamma_2, \gamma_2}(\lambda) \dots S_{\alpha_N, \beta_N}^{\gamma_N, \gamma_N}(\lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

где α_i и β_i ($1 \leq i \leq N$) — два набора чисел, каждый из k -рых может пробегать все l значений дискретного индекса α (или β). Такая искусств. конструкция T -матрицы размерности l^N полезна тем, что проблема диагонализации гамильтониана задачи сводится к отысканию собств. значений этой матрицы, что может представить выполнимую задачу.

Запишем трансфер-матрицу в инвариантной форме, перейдя от S -матрицы размерности l к нек-рой \mathcal{L} -матрице размерности l^{N+1} , следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi_n}(\lambda)_{\gamma_i, \beta_1, \dots, \beta_N}^{\gamma_i, \gamma_1, \dots, \gamma_N} = S_{\alpha, \beta}^{\gamma, \gamma'}(\lambda) \delta_{\alpha_1, \beta_1} \dots \delta_{\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}} \times \\ \times \delta_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}} \dots \delta_{\alpha_N, \beta_N}. \end{aligned} \quad (12)$$

В многомерном пространстве эта матрица диагональна по всем индексам α_i, β_i , кроме $i=n$. Выражение для T -матрицы в таком случае записывается в виде следа от произведения \mathcal{L} -матриц, взятого только по вспомогат. матричным индексам γ_i и γ'_i :

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_N}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\lambda) = \{ \text{Tr}_{\xi} \mathcal{L}_{\xi 1}(\lambda) \mathcal{L}_{\xi 2}(\lambda) \dots \mathcal{L}_{\xi N}(\lambda) \}_{\beta_1, \dots, \beta_N}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N}. \quad (13)$$

В операторной форме

$$T(\lambda) = \text{Tr}_{\xi} \mathcal{F}_{\xi}(\lambda),$$

где

$$\mathcal{F}_{\xi}(\lambda) = \mathcal{L}_{\xi 1}(\lambda) \mathcal{L}_{\xi 2}(\lambda) \dots \mathcal{L}_{\xi N}(\lambda) \quad (14)$$

наз. матрицей монодромии; её размерность равна l^{N+1} .

Соотношение (10) для S -матриц можно переписать в гермигах \mathcal{L} -матриц, вводя матрицу $\mathcal{L}_{\xi\eta}$ ф-лой

$$\mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda)_{\gamma_i, \gamma'_i}^{\gamma_i, \gamma'_i}(\lambda) \equiv S_{\gamma_i, \gamma'_i}^{\gamma_i, \gamma'_i}(\lambda).$$

Тогда имеет место следующее ур-ние:

$$\mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda) \mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda + \mu) \mathcal{L}_{\eta\eta}(\mu) = \mathcal{L}_{\eta\eta}(\mu) \mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda - \mu) \mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda). \quad (15)$$

Отсюда следует аналогичное ур-ние для матрицы монодромии:

$$\mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda - \mu) \mathcal{F}_{\xi}(\lambda) \mathcal{F}_{\eta}(\mu) = \mathcal{F}_{\eta}(\mu) \mathcal{F}_{\xi}(\lambda) \mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda - \mu). \quad (16)$$

Ур-ния (15) и (16) удобно переписать в др. форме, если подействовать на них оператором перестановки $P_{\xi\eta}$ индексов ξ и η :

$$R(\lambda - \mu) (\mathcal{L}_{\eta}(\lambda) \otimes \mathcal{L}_{\eta}(\mu)) = (\mathcal{L}_{\eta}(\mu) \otimes \mathcal{L}_{\eta}(\lambda)) R(\lambda - \mu), \quad (17)$$

$$R(\lambda - \mu) (\mathcal{F}(\lambda) \otimes \mathcal{F}(\mu)) = (\mathcal{F}(\mu) \otimes \mathcal{F}(\lambda)) R(\lambda - \mu), \quad (18)$$

где введена $R(\lambda)$ -матрица размерности l^2 ,

$$R(\lambda) = P_{\xi\eta} \mathcal{L}_{\xi\eta}(\lambda), \quad (19)$$

и символ тензорного произведения \otimes . Все ур-ния (15) — (18) также наз. ур-ниями Янга — Бакстера. Для ранее введённых T -матрицы и матрицы монодромии также справедливы ур-ния Янга — Бакстера. Дальнейшая программа состоит в том, чтобы установить связь этих матриц с гамильтонианом системы и провести их диагонализацию. Эта программа и составляет содержание КМОЗ и может быть фактически реализована только для конкретной системы. Пропиллюстрируем технику КМОЗ на примере анизотропной гейзенберговской цепочки (XYZ-модели).

Для исследования системы с гамильтонианом (1) выберем в качестве двухчастичной матрицы рассеяния выражение

$$S_{\alpha\alpha'}^{\gamma\gamma'}(\lambda) = \sum_{j=0}^3 w_j(\lambda) \sigma_{\gamma\gamma'}^j \sigma_{\alpha\alpha'}^j \quad (j=x, y, z) \quad (20)$$

с разл. величинами w_j (суммирование по j ведётся по четвёрём индексам: $j=x, y, z$ и 0 , причём σ^0 представляет собой единичную двухурядную матрицу). Матричная запись S -матрицы будет следующей: