ми (орбитальная У.). В том случае, когда трение не мало́, скорость шарика будет убывать и он остановится в точке устойчивого равновесия. Это состояние устойчиво асимптотически, в *фазовом пространстве* является притягивающим множеством. Если слабо деформировать поверхность, то характер движения не изменится (структурная У.).

Основные понятия. Пусть траектория L динамической системы задаётся отображением $x(t)=T^t x_0$, где x — совокупность координат точки в фазовом пространстве системы, T^t — оператор эволюции, преобразующий нач. состояние системы с координатами x_0 в состояние с координатами $x(t)$ в момент времени t. Траектория L устойчива по Ляпунову, если для сколь угодно малого ε можно найти такое δ, что для любого нач. состояния $\tilde{x}_0$, близкого к x_0, т. е. $\rho(\tilde{x}_0, x_0)<\delta$, всегда окажется $\rho(T^t\tilde{x}_0, T^t x_0)<\varepsilon$. Здесь $\rho(x_1, x_2)$ — расстояние между точками x_1 и x_2 в фазовом пространстве. Если

$$\lim_{t\to\infty} \rho\left[\tilde{x}(t), x(t)\right]=0,$$

то У. наз. асимптотической, а если к тому же

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\ln\rho\left[\tilde{x}(t), x(t)\right]\right\}<0,$$

то У. наз. экспоненциальной.

Пусть L — нек-рая траектория системы. $T^t L\subseteq L$, а $U_\varepsilon(L)$ — нек-рая её ε-окрестность, т. е. $\rho(x, L)<\varepsilon$ для любой точки $x\in U_\varepsilon(L)$; здесь и ниже $\rho(x, L)$ — расстояние от точки x до множества L в фазовом пространстве. Если для любого ε можно найти такое δ, что всякая траектория, начинающаяся в $U_\delta(L)$, всегда остаётся в $U_\varepsilon(L)$, то траектория L наз. орбитально (орбитно) устойчивой. Если к тому же существует такое δ_0, что при всех $\delta<\delta_0$ для любой траектории $\{x(t)\}$, начинающейся в $U_\delta(L)$,

$$\lim_{t\to\infty}\rho\left[x(t), L\right]=0, \tag{1}$$

то траектория наз. асимптотически орбитально устойчивой. Геом. смысл орбитальной устойчивости проиллюстрирован на рис. 2 (L — исходная, $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ — возмущённые траектории на фазовой плоскости $\{x, y\}$). Для У. по Ляпунову требуется также малость расстояния между одноврем. точками на близких траекториях (в указанном выше смысле).

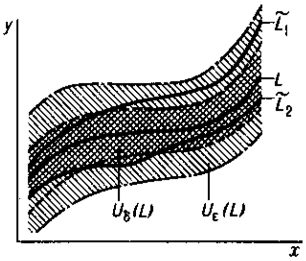

Рис. 2.

Из У. по Ляпунову следует У. орбитальная. Обратное, вообще говоря, не верно: две траектории могут быть сколь угодно близкими, а расстояние между двумя одноврем. точками на них может расти и стать немалым, даже если в нач. момент эти точки близки. Напр., для ур-ния Дуффинга (G. Duffing)

$$\ddot{x}+\omega^2 x-ax^3=0 \tag{2}$$

с нач. условиями

$$t=0: \dot{x}=0, x=A, |A|<A_0=\omega a^{-1/2} \tag{3}$$

все траектории периодические. Период решения τ растёт от $2\pi\omega$ до бесконечности по мере роста амплитуды A от нуля до A_0. При достаточно малых изменениях нач. условий траектории системы (2), (3) оказываются близкими. Однако благодаря зависимости периода решения от амплитуды близкие в нач. момент точки на двух соседних траекториях со временем разойдутся на большое расстояние. Поэтому при любых $a>0$ фазовые траектории системы устойчивы орбитально и неустойчивы по Ляпунову. В пределе $a=0$ ур-ние (2) переходит в ур-ние гармонич. колебаний, период к-рых не зависит от амплитуды $\tau=2\pi/\omega$, и все траектории оказываются устойчивыми по Ляпунову.

Если в ур-нии гармонич. колебаний учтено трение

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0,\ \gamma>0, \tag{4}$$

то такая система имеет асимптотически (экспоненциально) устойчивую траекторию: $x=0$, поскольку при любых нач. условиях $\rho[x(t), 0]\to 0$ при $t\to\infty$.

Асимптотически устойчивое множество траекторий L в фазовом пространстве динамич. системы наз. аттрактором, если оно: 1) компактно и неразложимо на отдельные структурные элементы; 2) инвариантно относительно T^t: $T^t L=L$; 3) оператор T^t рекуррентен на L, т. е. для сколь угодно больших времён $t_0>0$ траектория $y(t)=T^t x$ произвольной точки $x\in L$ при $t>t_0$ пройдёт в сколь угодно малой окрестности точки x. В случае замкнутых траекторий последнее требование означает бесконечнократное прохождение системой каждой точки траектории, т. е. периодич. движение (в силу теоремы Коши; см. *Коши задача*). Примеры аттракторов: асимптотически устойчивые стационарные состояния [для ур-ния (4) — это точка $x=0$]; устойчивые *предельные циклы; странные аттракторы* (отвечающие *стохастическим колебаниям* в нелинейных диссипативных системах).

Областью притяжения D аттрактора L наз. множество всех нач. точек $x\in D$, для к-рых

$$\lim_{t\to\infty}\rho(T^t x, L)=0. \tag{5}$$

Для ур-ния (4) область притяжения аттрактора $x=0$ совпадает со всем пространством.

Если автономная динамич. система $\dot{x}=f(x)$ имеет двумерное фазовое пространство, $x=\{x_1, x_2\}$, то её состояния равновесия $x=x_c$ определяются из системы ур-ний $f(x)=0$. На фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ поведение траекторий в окрестности одного из состояний равновесия может иметь вид, показанный на рис. 3: состояния равновесия

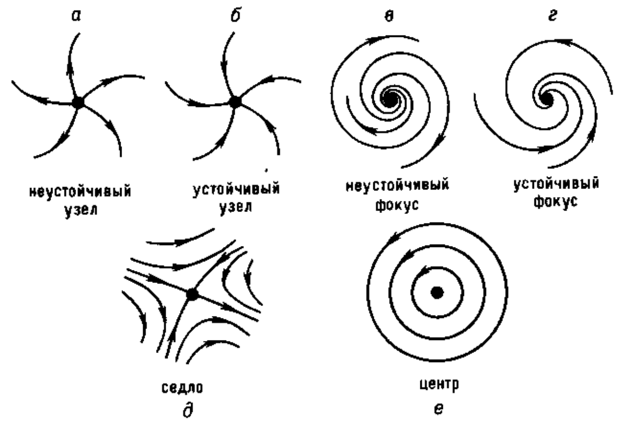

Рис. 3.

($а, в, д$) — неустойчивые, ($б, г$) — асимптотически устойчивые, равновесие ($е$) — устойчивое, но не асимптотически.

Если размерность фазового пространства больше чем 2, то наряду с указанными типами устойчивости могут появляться и более сложные, комбинир. типы (напр., седло — узел, узел — фокус и др.).

В ряде случаев динамич. система имеет большое число густорасположенных стационарных состояний. Такая ситуация реализуется, напр., когда тяжёлый шарик находится на горизонтальной плоскости. В каждой точке поверхности положение шарика устойчиво, причём нач. условия определяют то положение, какое установится в процессе эволюции. Напр., если сила трения качения пропорц. скорости, то изменение координаты шарика со временем описывается ур-нием