стройки структуры фазового пространства при переходе через бифуркац. значения параметров (см. *Бифуркация*).

У. по Лагранжу — свойство динамич. системы оставаться в ходе эволюции в огранич. области фазового пространства.

У. по Пуассону (возвращаемость) — свойство динамич. системы возвращаться в ходе эволюции сколь угодно близко к своему нач. положению (в фазовом пространстве) по истечении сколь угодно большого времени (см. *Пуанкаре теорема*, *Эргодическая теория*).

У. условная — У. по отношению не к произвольным возмущениям, а только по отношению к тем, к-рые подчинены определ. ограничениям.

У. систем с дискретным временем. Пусть имеется нек-рая последовательность $\{x_n\}$, задаваемая рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где x_n — k-компонентный вектор, $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nk})$. К такому виду может быть приведено описание мн. динамич. систем с непрерывным временем; в случае (10) в роли времени выступает номер члена последовательности. На такие системы естеств. образом переносятся все приведённые определения У.

Пусть x_n — однокомпонентная величина ($k=1$) и $\bar{x}$ — неподвижная точка отображения (10), $\bar{x} = f(\bar{x})$. Точка $\bar{x}$ асимптотически устойчива, если в ней $|(df/dx)_{x=\bar{x}}| < 1$, и неустойчива, если знак неравенства противоположный. Тем самым асиптотическая У. неподвижной точки x эквивалентна сходимости итерационного процесса (10) решения ур-ния $x - f(x) = 0$.

У. по отношению к конечным возмущениям. Пусть система обладает N устойчивыми состояниями $\{S_i\}$, т. е. имеет место мультистабильность (при $N=2$ — бистабильность). Каждое из устойчивых состояний S_i, $i = 1, \ldots, N$ обладает нек-рой областью притяжения $D(S_i)$. Любое возмущение, не выводящее систему из $D(S_i)$, входит в класс тех возмущений, по отношению к к-рым состояние S_i устойчиво. Наоборот, состояние S_i неустойчиво по отношению к возмущениям всякий раз, когда эти возмущения переводят систему из $D(S_i)$ в $D(S_j)$ при $j \neq i$. Эти возмущения заведомо конечны (не могут быть сколь угодно малыми), поскольку для любой пары $j \neq i$ $\rho(S_i, S_j) > 0$. Напр., для инициирования горения необходимо, чтобы очаг имел достаточно высокую темп-ру и большие размеры. При этом условии система переходит из низкотемпературного режима протекания экзотермич. реакции в высокотемпературный.

У. распределённых систем. Такие системы в общем случае характеризуются бесконечным числом степеней свободы и бесконечномерным (во многих случаях — счётномерным) фазовым пространством.

Для определения типа У. применяют методы Ляпунова (см. выше), модифицированные применительно к специфике распределённых систем. Напр., для краевой задачи

$$\begin{gathered} u_t = -u_{xxxx} - 2k_0^2 u_{xx} + (\beta - k_0^4)u - u^3,\ x \in (0, R), \\ u_x|_{x=0,R} = 0,\ u_{xxx}|_{x=0,R} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(\bar{x}) \end{gathered} \tag{11}$$

в качестве функционала Ляпунова может использоваться величина

$$V(u) = \int_0^R \left[\frac{1}{2}(u_{xx} + u)^2 - \frac{1}{2}(\beta - k_0^4)u^2 + \frac{1}{4}u^4\right] dx. \tag{12}$$

Согласно (11), (12):

$$V(u) \geqslant 0 \text{ при } \beta < 0 \text{ и } V(u) \geqslant -\beta^2 R/4 \text{ при } \beta > 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^R u_t^2\, dx \leqslant 0,$$

т. е. функционал $V(u)$ монотонно убывает и ограничен снизу, а его производная dV/dt обращается в нуль только на стационарных решениях задачи (11). Поэтому из любых нач. состояний система переходит к нек-рому устойчивому стационарному состоянию. Задача (11) при $\beta < k_0^4$ имеет единственное однородное решение: $u = 0$. Кроме того, при $\beta > 0$ и достаточно больших R она имеет неоднородные пространственно-периодические стационарные решения [при $\beta < k_0^4$ их периоды лежат в интервале $\lambda \in (\pi/k_1, \pi/k_2)$, $k_1 = (k_0^2 + \sqrt{\beta})^{1/2}$, $k_2 = (k_0^2 - \sqrt{\beta})^{1/2}$, $2R/\lambda$ — целое]. Выяснить, какие из этих решений устойчивы, можно с помощью второго метода Ляпунова. Для этого следует линеаризовать (11) в окрестности изучаемого стационарного решения $u_c(x)$ и, полагая малое возмущение равным $v(x, t) = u(x, t) - u_c(x) = v_0(x)\exp(pt)$, найти спектр собств. значений краевой задачи:

$$\begin{gathered} p v_0 = -(v_0)_{xxxx} - 2k_0^2 (v_0)_{xx} + [\beta - k_0^4 - 3u_c^2(x)]\, v_0 \\ (v_0)_x|_{x=0,R} = 0,\ (v_0)_{xxx}|_{x=0,R} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

В частности, если $u_c(x) = 0$, то

$$p = \beta - (q^2 - k_0^2)^2, \tag{14}$$

где q — волновой вектор возмущения $v_0(x) = v_0 \exp(iqx)$, пробегающий дискретный ряд значений $q = n\pi/R$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, при $\beta < 0$ все возмущения затухают, причём

$$\overline{\lim}\left[\frac{1}{t}\ln|v(x, t)|\right] \leqslant \beta < 0,$$

т. е. решение $u_c(x) = 0$ устойчиво экспоненциально ($\overline{\lim}$ означает верх. предел). Наоборот, при $\beta > 0$ и достаточно больших R в область $p > 0$ попадает группа допустимых волновых векторов q, так что соответствующие возмущения экспоненциально растут. Следовательно, решение $u_c(x) = 0$ неустойчиво. Исследование У. неоднородных стационарных решений выполняется с помощью теории линейных дифференц. ур-ний с периодич. коэф. и показывает, что из всех стационарных решений при $\beta \ll k_0^4$ устойчивы только решения с периодами $\lambda \in (\pi/k_3, \pi/k_4)$, $k_3 = (k_0^2 + \sqrt{\beta/3})^{1/2}$, $k_4 = (k_0^2 - \sqrt{\beta/3})^{1/2}$.

В более общем случае пусть система описывается связанными нелинейными ур-ниями диффузионного типа:

$$u_t = \nabla(D\nabla u) + f(u), \tag{15}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u))$, D — $n \times n$-матрица, зависящая от u. Пусть $u_c = 0$ стационарное решение (15), $f(0) = 0$. Линеаризация (15) в окрестности u_c позволяет получить характеристическое ур-ние:

$$\det(p + Dq^2 - g) = 0,\ g = (df(u)/du|_{u=u_c}). \tag{16}$$

Система наз. абсолютно неустойчивой, если ур-ние (16) имеет решения с $\mathrm{Re}\, p > 0$ при $q = 0$ (т. е. каждая точка среды может самовозбуждаться в отсутствие диффузионного взаимодействия между соседними точками). В частности, если в область $\mathrm{Re}\, p > 0$ попадает чётное число корней ур-ния (16), то неустойчивость наз. колебательной. Если возникновение неустойчивости обусловлено диффузией, т. е. среда локально устойчива, пока не включено взаимодействие между соседними её элементами, то неустойчивость наз. диффузионной. Формально это значит, что $\mathrm{Re}\, p(0) \leqslant 0$, а $\mathrm{Re}\, p(q) > 0$ только в нек-рых интервалах значений $|q| > 0$. В примере (11), (14) неустойчивость однородного состояния является диффузионной. Диффузионную неустойчивость в двухкомпонентной системе (15) с диагональной матрицей D иногда наз. тьюринговской (A. M. Turing, 1952).

Если двухкомпонентная система (15) колебательно неустойчива, то при $D = 0$ в ней могут возникать простые автоколебания. При $D \neq 0$ могут появляться более сложные нестационарные режимы — вплоть до стохастических. Поскольку происхождение этих режимов связано с диффузией, их наз. диффузионным *хаосом*.

Лит.: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 3 изд., М., 1981; Меркин Д. П., Введение в теорию устойчивости движения, 3 изд., М., 1987; Бутенин Н. В., Ней-