

К началу $(n+1)$ -го толчка фаза x приобретает значение $x_{n+1} = x_n + p_{n+1} T$. Т. о., отображение

$$p_{n+1} = p_n - K \sin x_n, \quad x_{n+1} = x_n + p_{n+1} T \pmod{2\pi} \quad (15)$$

определяет значения переменных p, x к моменту $(n+1)$ -го толчка через их значения до начала n -го толчка. Отображение (15) наз. отображением Чирикова—Тейлора или стандартным отображением (1979). Без ограничения общности можно принять $T=1$. Фазовые портреты (15) приведены на рис. 7: (а) для $K < K_c$ и (б) для $K > K_c$, где критич. значение $K_c = 0,9716\dots$. На плоскости p, x каждой точке соответствует нек-рая пара (p_n, x_n) , принадлежащая одной траектории. Беспорядочное распределение последовательных пар (p_n, x_n) на плоскости демонстрирует явление хаоса для модели (15). Отд. области не заняты точками стохастич. траектории. Эти области—островки, в к-рых имеется конечная мера периодич. траекторий. В центр. частях островков выполнены условия теории КАМ. На рис. 7(а) узкие

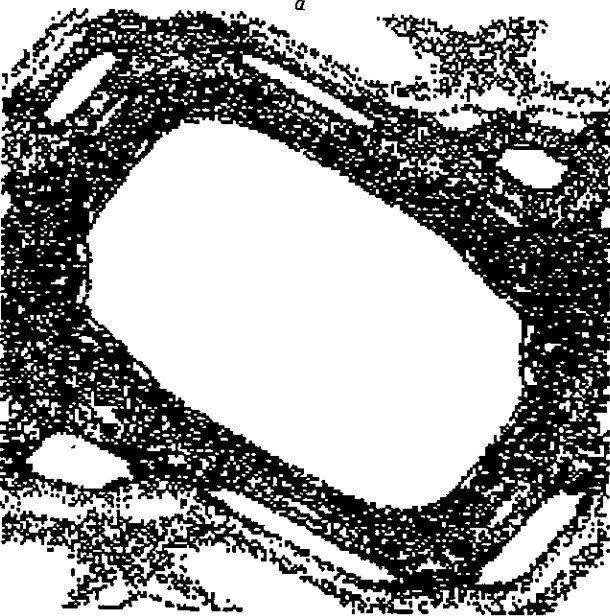
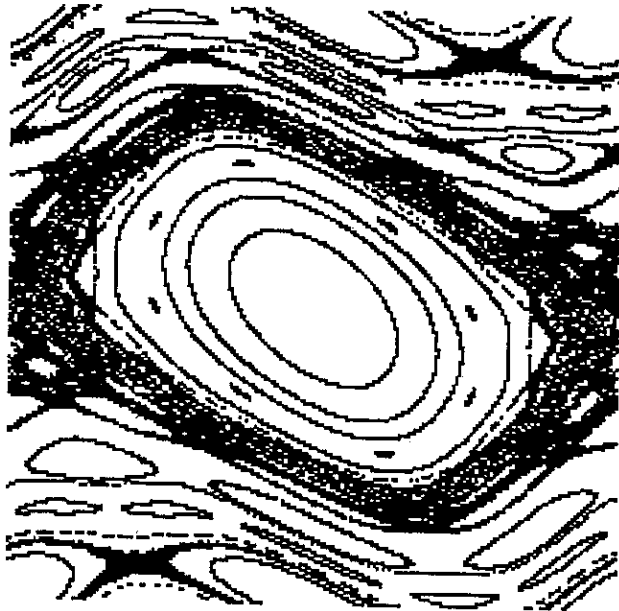


Рис. 7.

области стохастич. динамики (стохастич. слой) отделены друг от друга инвариантными кривыми. На рис. 7(б) стохастич. слой сильно расширился и соединился друг с другом, образовав «стохастич. море». Этот переход происходит при нек-ром критич. значении параметра $K=K_c$. При $K > K_c$ возможно неогранич. увеличение энергии частицы благодаря стохастич. ускорению. Существование островков обусловлено наличием члена $\sim \sin x$ в (15), к-рый приводит к появлению областей устойчивости даже при $K \gg 1$.

Стохастич. слой является зародышем хаоса в гамильтоновых системах. Примеры образования таких слоёв видны на рис. 7(а). Они образуются при любых сколь угодно малых возмущениях и поэтому являются примером неустойчивого хаоса. Пусть, напр., задан нелинейный маятник, описываемый ур-нием движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon \sin(Kx - \omega t). \quad (16)$$

В отсутствие возмущения ($\varepsilon=0$) сепаратрисой является траектория с энергией $E = \omega_0^2$, к-рая отделяет колебания ($E < \omega_0^2$) от вращений ($E > \omega_0^2$). При $\varepsilon \neq 0$ сепаратриса разрушается и в её окрестности возникает зона хаоса шириной $\delta E \sim \varepsilon$, если частота $\omega \sim \omega_0$. Если частота $\omega \gg \omega_0$, то ширина стохастич. слоя оказывается пропорциональной $\exp(-\pi\omega/2\omega_0)$, т.е. экспоненциально малой.

Разл. стохастич. слои в фазовом пространстве могут пересекаться, образуя нек-рую сеть каналов, внутри к-рых динамика системы является стохастической (рис. 8). Эта сеть наз. стохастич. паутиной (паутиной Арнольда). Если размерность фазового пространства $2N=4$, то двумерные инвариантные торы разделяют трёхмерный объём, в к-ром движется система (из-за сохранения энергии), на изолир. области (подобно тому, как линия на плоскости делит 2-мерное пространство на изолир. части). Однако уже для трёх и более степеней свободы ($N > 2$) N -мерные торы не разделяют $(2N-1)$ -мерную энергетич. поверхность. Поэтому стохастич. паутина оказывается связанной, подходя сколь угодно близко к любой точке фазового пространства. Наличие паутины приводит к неогранич. переносу частиц вдоль стохастич. слоя, называемому диффузией Арнольда.

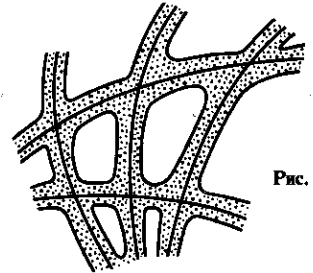


Рис. 8.

Примером, в к-ром возникает стохастич. паутина с нетривиальной топологией, является осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) - K \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (17)$$

отличающимся от (13) наличием потенц. энергии $x^2/2$. Этому осциллятору соответствует точечное отображение

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (p_n - K \sin x_n) \cos T - x_n \sin T, \\ x_{n+1} &= (p_n - K \sin x_n) \sin T + x_n \cos T. \end{aligned} \quad (18)$$

Если период T следования ударов удовлетворяет условию $T = 2\pi/q$, где q —целое число, то при $q > 2$ на фазовой плоскости возникает стохастич. паутина с симметрией порядка q . Решётка является тем более правильной, чем тоньше паутина, т.е. чем меньше параметр K . На рис. 9 показаны примеры стохастич. паутины с (а) симметрией квадратной решётки ($q=4$), (б) гексагональной симметрией ($q=3$ и $q=6$) и (в) симметрией 5-го порядка ($q=5$).

II. Диссипативные системы

В отличие от гамильтоновых систем фазовый объём систем диссипативных меняется со временем. При этом характер изменения зависит от выбора области в фазовом пространстве. В соответствии с этим фазовое простран-