Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville). Понятия и методы, зародившиеся в процессе изучения Ш.— Л. з., сыграли большую роль в развитии мн. направлений математики и физики. Она была и остаётся пост. источником новых идей и задач для спектральной теории операторов и смежных вопросов анализа. Особое значение она приобрела после открытия связи с нек-рыми эволюционными *нелинейными уравнениями математической физики.*

Если $p(x)$ дифференцируема, а $p(x)r(x)$ дифференцируема дважды, то ур-ние (1) с помощью подстановок Лиувилля (см. [1]) сводится к виду

$$-y''+q(x)y=\lambda y. \tag{2}$$

Принято различать регулярные и сингулярные задачи. Ш.—Л. з. для ур-ния (2) наз. регулярной, если интервал (a, b) изменения переменной x конечен и если ф-ция $q(x)$ суммируема во всём интервале (a, b). Если интервал (a, b) бесконечен или $q(x)$ несуммируема (или и то и другое), то задача наз. сингулярной.

Ниже рассматриваются в отдельности следующие случаи: 1) интервал (a, b) конечен, в этом случае, не нарушая общности, можно считать, что $a=0$ и $b=\pi$; 2) $a=0$, $b=\infty$; 3) $a=-\infty$, $b=\infty$.

1. Рассматривается задача, порождённая на сегменте $[0, \pi]$ ур-нием (2), в к-ром $q(x)$—действительная суммируемая на сегменте $[0, \pi]$ ф-ция (λ—комплексный параметр), и разделёнными граничными условиями

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \tag{3}$$

где h и H—произвольные конечные или бесконечные фиксированные действительные числа. Если $h=\infty$ $(H=\infty)$, то первое (второе) условие в (3) заменяется условием $y(0)=0$ $(y(\pi)=0)$. Для определённости далее предполагается, что числа, участвующие в граничных условиях, конечны.

Число λ_0 наз. собств. значением задачи (2), (3), если при $\lambda=\lambda_0$ ур-ние (2) имеет нетривиальное решение $y_0(x)\neq 0$, удовлетворяющее граничным условиям (3); при этом ф-ция $y_0(x)$ наз. собств. ф-цией, соответствующей собств. значению λ_0.

Собств. значения граничной задачи (2), (3) действительны; каждому собств. значению соответствует единственная собств. ф-ция [в силу действительности $q(x)$ и чисел h, H собственные ф-ции задачи (2), (3) можно выбрать действительными]; собств. ф-ции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие разл. собств. значениям, ортогональны, т. е.

$$\int_0^\pi y_1(x)\,y_2(x)\,dx=0.$$

Существует неограниченно возрастающая последовательность собств. значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ граничной задачи (2), (3); при этом собств. ф-ция $y_n(x)$, соответствующая собств. значению λ_n, имеет ровно n нулей в интервале $(0, \pi)$.

Пусть $W_2^m\,[0, \pi]$—пространство Соболева, состоящее из заданных на сегменте $[0, \pi]$ комплекснозначных ф-ций, к-рые имеют $m-1$ абсолютно непрерывных производных и производную порядка m, суммируемую на сегменте $[0, \pi]$. Если $q(x)\in W_2^m\,[0, \pi]$, то собств. значения λ_n граничной задачи (2), (3) при больших n удовлетворяют асимптотич. равенству (см. [4])

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant m+2}\frac{c_{2j+1}}{n^{2j+1}}+\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+2}}\times$$
$$\times\left(S_m(n)+\frac{\tilde S_m(n)}{n}\right)\frac{1}{n^{m+1}}+\frac{\delta_n}{n^{m+2}}+\frac{\varepsilon_n(h,\ H)}{n^{m+3}},$$

где c_{2j+1}—независимые от n числа,

$$c_1=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),$$

$$S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+1)\right\}dt,$$

$$\tilde S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)(2h-c_1t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+2)\right\}dt,$$

δ_n не зависят от h, H и

$$\sum_{n=0}^\infty|\delta_n|^2<\infty,\quad \sum_{n=0}^\infty|\varepsilon_n(h,\ H)|^2<\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $q(x)\in W_2^1\,[0, \pi]$, то

$$\lambda_n=n^2+c+\frac{1}{n}\gamma_n,$$

где

$$c=\frac{2}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),\quad \sum_{n=0}^\infty|\gamma_n|^2<\infty.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^\infty(\lambda_n-n^2-c)$ сходится. Его сумма наз. регуляризованным следом задачи (2), (3) (см. [13]):

$$\sum_{n=0}^\infty(\lambda_n-n^2-c)=\frac{q(0)+q(\pi)}{4}-\frac{(h+H)^2}{2}+hH-\frac{c}{2}.$$

Пусть $v_0(x)$, $v_1(x)$, ...—ортонормированные собств. ф-ции задачи (2), (3), соответствующие собств. значениям λ_0, λ_1, ... Для каждой ф-ции $f(x)\in L_2\,[0, \pi]$ имеет место т. н. равенство Парсеваля

$$\int_0^\pi|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2,$$

где

$$a_n=\int_0^\pi f(x)\,v_n(x)\,dx,$$

и справедлива ф-ла разложения по собств. ф-циям

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_n v_n(x), \tag{4}$$

где ряд сходится в метрике пространства $L_2\,[0, \pi]$. Теоремы полноты и разложения для регулярной Ш.—Л. з. впервые доказаны В. А. Стекловым [14].

Если ф-ция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную и удовлетворяет граничным условиям (3), то справедливы следующие утверждения (см. [15]):

а) ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к ф-ции $f(x)$;

б) один раз продифференцированный ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к $f'(x)$;

в) в каждой точке, в к-рой $f''(x)$ удовлетворяет к.-л. локальному условию разложения в ряд Фурье (напр., имеет ограниченную вариацию), дважды продифференцированный ряд (4) сходится к $f''(x)$.

Для любой ф-ции $f(x)\in L_1\,[0, \pi]$ ряд (4) является равномерно равносходящимся с рядом Фурье ф-ции $f(x)$ по $\cos nx$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}|V_{N,f}(x)-c_{N,f}(x)|=0,$$

$$V_{N,f}(x)=\int_0^\pi f(t)\sum_{n=0}^N v_n(x)\,v_n(t)\,dt,$$

$$c_{N,f}(x)=\int_0^\pi f(t)\left\{\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^N\cos nx\cos nt\right\}dt.$$

Это утверждение означает, что разложение ф-ции $f(x)$ по