

выражена через изменение энергии эл.-магн. поля W внутри объема $V(t)$ и её поток через границу $\Sigma(t)$ этого объема, элементы к-рой $d\sigma$ имеют локальную скорость v' :

$$\frac{dW_0}{dt} = -\frac{dW}{dt} - \oint_{\Sigma(t)} \left(c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{4\pi} - \mathbf{v}' \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) d\sigma.$$

Классическая электродинамика в искривлённом пространстве-времени

До сих пор речь шла о плоском пространстве-времени (и декартовых координатах в нём). Будучи искривлённым, оно изменяет характер взаимодействия между эл.-магн. полем и заряж. частицами; такова ситуация, напр., в окрестностях вращающихся нейтронных звёзд и чёрных дыр. Нарушаются также законы Э. о сохранении полных 4-импульса $P_\alpha + P_{0\alpha}$ и момента импульса $M + M_0$ благодаря их передаче гравитац. полю. В частности, возможна прямая трансформация эл.-магн. волн в гравитационные и непосредств. гравитац. излучение заряж. частиц, движущихся под действием эл.-магн. поля, напр., в плазме. Считая гравитац. фон $g_{\alpha\beta}(ct, r)$ внешним, заданным независимо от перераспределения энергии-импульса эл.-магн. поля и зарядов, законы Э. как системы дифференц. ур-ний первого порядка можно однозначно установить из принципа общей ковариантности. Согласно этому принципу, в искривлённом пространстве-времени (или в любых криволинейных координатах) следует заменить частную производную (запятую) любого тензора, напр. $T_{\beta,\nu}^\alpha$ в (20), на *ковариантную производную* (точку с запятой) $T_{\beta,\nu}^\alpha = \partial T_{\beta,\nu}^\alpha / \partial x^\nu + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha T_{\beta}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha T_{\beta}^\alpha$, добавляя на каждый контравариантный индекс α член $+\Gamma_{\beta\nu}^\alpha T_{\beta}^\alpha$, а на каждый ковариантный индекс β член $-\Gamma_{\beta\nu}^\alpha T_{\beta}^\alpha$, где $\Gamma_{\beta\nu}^\alpha = (1/2)g^{\mu\delta}(g_{\delta\nu,\alpha} + g_{\delta\alpha,\nu} - g_{\delta\alpha,\nu})$ — *Кристоффеля символы*.

В результате ур-ния Э. (1'), (8) (без магн. зарядов) суть

$$m_n \frac{dv_n^\alpha}{d\tau_n} = c^{-1} q_n F_{\beta}^\alpha v_n^\beta - m_n \Gamma_{\beta\nu}^\alpha v_n^\beta v_n^\nu, \quad v_n^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau_n}, \quad (1'')$$

$$F_{\beta}^\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad F_{\alpha\beta,\nu} + F_{\nu\alpha,\beta} + F_{\beta\nu,\alpha} = 0 \quad (8'')$$

($g = \det g_{\alpha\beta}$), причём последнее ур-ние не меняет свой вид и удовлетворяется введением прежних потенциалов (13). Вектор 4-тока

$$j^\alpha = \sum_n q_n \frac{c}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \frac{dx_n^\alpha}{dx^0},$$

или для непрерывного распределения зарядов $j^\alpha = \sum_n j_n^\alpha$,

где $j_n^\alpha = (\rho_n c / \sqrt{g_{00}}) dx_n^\alpha / dx^0$ [в окрестности мировой линии $x_n(t)$], а плотность зарядов $\rho = \sum_n \rho_n \equiv j^0 \sqrt{g_{00}} / c$. Ур-ние непрерывности $T_{\beta,\nu}^\alpha = -f_\beta$ для α плотности энергии-импульса эл.-магн. поля (12) (и аналогично — зарядов) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\beta\nu})}{\partial x^\nu} = -f^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha T^{\beta\nu} \quad (21'')$$

и содержит, наряду с силой Лоренца f^β [ср. (21)], силу тяготения. Последняя имеется также в ур-нии движения зарядов (1''), куда, кроме того, нужно в качестве поправки ввести силу реакции излучения. Она включает дополнительные к (18) слагаемые, связанные с ускоренным движением заряда в гравитац. поле, в т.ч. создаваемом 4-импульсом эл.-магн. поля — внешнего и собственного.

Поле тяжести как среда. Электрическое E и магнитное B поля, определяемые компонентами $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} F_{\beta}^\nu$, по-прежнему находятся, согласно (1''), непосредственными измерениями ускорений пробных заряд. частиц, движущихся с определённой скоростью v_n^α в локально инерциальной (свободно падающей) системе отсчёта, где $\Gamma_{\beta\nu}^\alpha = 0$ (см.

Геодезическая линия). Для записи ур-ний поля (8'') в 3-мерной форме удобно ввести вектор $G_i = -g_{0i}/g_{00}$, 3-мерный метрич. тензор $\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{00} G_i G_j$, его определитель $\Gamma = \det \gamma_{ij}$ и новые, отличные от $E_i = F_{0i}$ и $B^i = -(1/2\sqrt{\Gamma})\epsilon^{ijl} F_{lj}$, поля

$$D^i = \sqrt{g_{00}} F^{0i}, \quad H_i = -\frac{1}{2} \sqrt{g_{00}} \Gamma \epsilon_{ijl} F^{jl}, \quad (22)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} E + [HG], \quad B = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} H + [GE].$$

Тогда ур-ния Максвелла в гравитац. поле для произвольных локальных координат r и локального времени t принимают вид

$$\text{div } D = 4\pi\rho, \quad \text{rot } H = \frac{1}{c\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial(\sqrt{\Gamma} D)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad (6'')$$

$$\text{div } B = 0, \quad \text{rot } E = -\frac{1}{c\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial(\sqrt{\Gamma} B)}{\partial t}, \quad (7'')$$

формально аналогичный ур-ниям в среде. В частности, статич. гравитац. поле играет роль среды с электрич. и магн. проницаемостями $\epsilon = \mu = 1/\sqrt{g_{00}}$, причём в слабом поле тяжести всё определяется скалярным гравитац. потенциалом ϕ , поскольку $1 - g_{00} \approx 2\phi/c^2$. Другие, иногда более удобные, формы ур-ниям (8'') можно придать, производя «3+1»-расщепление пространства-времени и переходя к «абсолютному» пространству и единому «глобальному» времени, но используя для измерения физ. величин $F_{\alpha\beta}$ и j^α систему отсчёта к.-л. локальных наблюдателей, напр. локально не вращающихся [К. Торн (K. Thorne), Д. Макдональд (D. Macdonald), 1982]. Обобщая конформные преобразования (9), сохраняющие ур-ния светового конуса $x_\alpha x^\alpha = 0$, можно утверждать, что ур-ния Максвелла (6'') — (8'') ковариантны по отношению к общему растяжению всех длин согласно замене:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = \tilde{f} g_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} \rightarrow F'_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}, \quad j_\alpha \rightarrow j'_\alpha = \tilde{f}^{-2} j_\alpha,$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}(x^\delta)$ — произвольная ф-ция координат.

Оптика и термодинамика излучения в гравитац. поле. В отсутствие источников ур-ния (6'') — (8'') имеют наиб. простое решение для полей, длина волны к-рых мала по сравнению с характерным радиусом *кривизны пространства-времени* и масштабом изменения амплитуды, поляризации и длины волны этих полей. В таком приближении справедливы законы геом. оптики: световые лучи являются нулевыми геодезическими, удовлетворяющими ур-ниям $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$; вектор поляризации поля перпендикулярен лучам и переносится параллельно вдоль них; амплитуда поля определяется законом сохранения эл.-магн. энергии в соответствии с адиабатич. постоянным числом фотонов в каждой лучевой трубке. В результате свет и радиоволны, напр. от звёзд или квазаров, проходя вблизи массивных тел, напр. галактик или чёрных дыр, испытывают угл. отклонение (рефракцию) и временное запаздывание. Эти эффекты, независимые от поляризации, впервые наблюдались в поле тяжести Солнца соответственно путём оптич. наблюдений затменных звёзд в 1919 [А. Эддингтон (A. Eddington)] и путём радиолокации Меркурия в 1968 И. Шапиро (I. Shapiro); в 1979—80 Д. Уолш (D. Walsh), Р. Вейман (R. Weymann) и др. обнаружили также двойные изображения квазаров, обусловленные эффектом гравитац. линзы (см. *Гравитационная фокусировка*). Кроме того, имеется изменение локально измеряемых поляризации и длины волны λ излучения. Последнее в статич. поле тяжести подчиняется закону $\lambda \sim \sqrt{g_{00}}$ и в земных условиях впервые измерено в 1960 для γ -лучей с использованием *Мёссбауэра эффекта* [Р. Паунд (R. Pound), Дж. Ребка младший (G. Rebka Jr.)]. Вследствие расширения Вселенной существует ещё космологич. *красное смещение*, благодаря к-рому сдвигаются наблюдаемые спектры далёких галактик и квазаров и происходит остывание реликтового излучения.