

Ф-ция $\operatorname{sn} x$ — дwoякопериодическая. Её второй основной период равен $2iK'$, где

$$K' = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)[1-(k'\tau)^2]}}$$

и $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнит. модуль.

Э. ф. Вейерштрасса (пз-функция) $u = \Upsilon(x)$ может быть определена как обратная интегралу

$$x = \int_{\infty}^u \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \quad (2)$$

(g_2 и g_3 наз. инвариантами). При этом предполагается, что нули e_1, e_2 и e_3 многочлена $4t^3 - g_2t - g_3$ различны между собой [в противном случае интеграл (2) выражался бы через элементарные ф-ции]. Если, в частности, числа e_1, e_2, e_3 вещественны и различны [это будет при условии, что g_2 и g_3 — вещественные числа и $\Delta = (1/16)(g_2^3 - 27g_3^2) > 0$], причём $e_1 > e_2 > e_3$, то

$$2\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$$

и

$$2\omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{(e_1-t)(e_2-t)(e_3-t)}}$$

будут основными периодами Э. ф. $\Upsilon(z)$. Эта ф-ция принимает тогда действительные значения не только при $z = x$, но и при $z = \omega_1 + iy, z = x + i\omega_3$ и $z = iy$; на рис. 2 представлены соответствующие графики. Если z описывает прямоугольник $0 < x < \omega_1, 0 < y < \omega_3/i$, то $w = \Upsilon(z)$ описывает нижнюю полуплоскость, причём соответствие между z и w является взаимно однозначным и конформным. С $\operatorname{sn}(z; k)$ ф-ция $\Upsilon(z)$ связана зависимостью

$$\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\Upsilon(z) - e_3}} = \operatorname{sn} \left(\sqrt{e_1 - e_3}; \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \right).$$

Общие свойства эллиптич. функций. Э. ф. — любая мероморфная (см. в ст. *Аналитическая функция*) дwoякопериодич. ф-ция $f(z)$. Пусть $2\omega_1$ и $2\omega_3$ (отношение $\omega_3:\omega_1$ мнимое) — основные периоды ф-ции $f(z)$, тогда $f(z + 2\omega_1 m + 2\omega_3 n) = f(z)$ при $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В силу этого достаточно изучить $f(z)$ в каком-либо параллелограмме её периодов P (рис. 3); к P кроме его внутр. точек причисляются точки сторон OA и OB ,

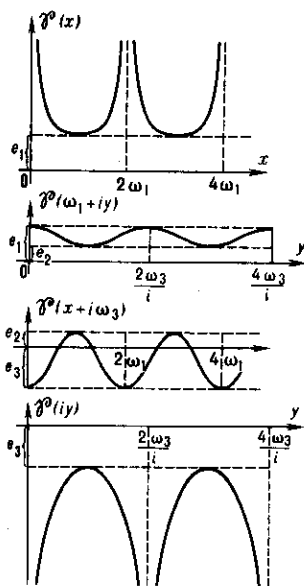


Рис. 2.

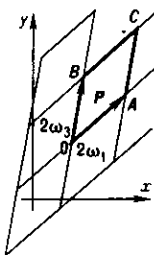


Рис. 3.

исключая вершины A и B . Имеют место след. теоремы Лиувилля: сумма, разность, произведение и частное Э. ф. есть Э. ф.; производная Э. ф. есть Э. ф.; если Э. ф. $\neq \operatorname{const}$, то число N полюсов в P (с учётом кратности полюсов) ≥ 2 ; ур-ние $f(z) = a$ при любом a имеет N корней в P ; суммы корней для двух разных a могут различаться только на нек-рый период $\Omega = 2\omega_1 m + 2\omega_3 n$. Построим функции:

$$\sigma(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{\Omega} \right) \exp \left(\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2} \right),$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2} \right),$$

$$\Upsilon(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right],$$

где \prod' и \sum' — знаки произведения и суммы, распространённые на все периоды $\Omega \neq 0$. Функция $\sigma(z)$ — простейшая целая функция, имеющая нули 1-го порядка во всех точках Ω (т. н. сигма-функция), $\zeta(z)$ и $\Upsilon(z)$ — простейшие мероморфные функции, имеющие полюсы в Ω соответственно 1-го и 2-го порядков. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ и β_1, \dots, β_N — нули и полюсы Э. ф. $f(z)$, принадлежащие P (кратные нули и полюсы выписываются столько раз, какова их кратность), тогда $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = C_0 \frac{\sigma(z-\alpha_1) \dots \sigma(z-\alpha_N)}{\sigma(z-\beta_1) \dots \sigma(z-\beta_N)}, \quad (3)$$

где C_0 постоянная и $\beta'_N = (\alpha_1 + \dots + \alpha_N) - (\beta_1 + \dots + \beta_{N-1})$. Если b_1, \dots, b_n — различные между собой полюсы $f(z)$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ — их порядки ($\kappa_1 + \dots + \kappa_n = N$), причём главная часть разложения $f(z)$ в окрестности b_k есть

$$\frac{A^{(\kappa_k)}}{z-b_k} + \dots + \frac{A^{(\kappa_k)}}{(z-b_k)^{\kappa_k}},$$

то

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^n \left\{ A^{(\kappa_k)} \zeta(z-b_k) - \frac{A^{(\kappa_k)}}{2!} \zeta'(z-b_k) + \dots + (-1)^{\kappa_k-1} \frac{A^{(\kappa_k)}}{(\kappa_k-1)!} \zeta^{\kappa_k-1}(z-b_k) \right\}, \quad (4)$$

где C — постоянная; формулы (3) и (4), принадлежащие К. Вейерштрассу (К. Weierstraß), аналогичны формулам, представляющим рациональную функцию в виде частного двух произведений линейных множителей (многочленов) либо в виде суммы простейших дробей; на них основывается вся теория Э. ф.

К идее обращения эллиптич. интегралов впервые пришёл К. Гаусс (С. Gauss), получивший мн. результаты теории Э. ф. ещё в кон. 18 в. (1797 и последующие годы), но не публиковавший их. Фактически основателями Э. ф. являются Абель и Якоби. Последний дал развёрнутое изложение теории Э. ф., названных его именем (они были введены Абелем). В 1847 Ж. Лиувилль (J. Liouville) опубликовал изложение основ теории Э. ф., рассматриваемых как мероморфные дwoякопериодич. функции; это изложение — пример применения к теории Э. ф. начал теории аналитич. функций комплексного переменного, развитых О. Коши (A. Cauchy).

Вейерштрасс пришёл к своим функциям $\sigma(z), \zeta(z), \Upsilon(z)$, по-видимому, ещё в 40-х гг. 19 в. [аналогичные функции встречаются в работах Ф. Эйзенштейна (F. Eisenstein, 1847) и др. учёных]. Краткое изложение теории Э. ф. в обозначениях Вейерштрасса было опубликовано Г. Шварцем (H. Schwartz, 1883—84). Необходимо также отметить работы Ш. Эрмита (Ch. Hermite), получившего с помощью Э. ф. решение общего алгебраич. уравнения 5-й степени.

Лит.: Ахизер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; Гурвич А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968. А. И. Маркушевич.