растёт интерес к ДС, в к-рых временно́й параметр t пробегает не одномерное пространство R^1 (или решётку Z^1), а пространство R^d (решётку Z^d) или группу ещё более общего вида. Такие системы находят, в частности, применение в статистич. физике. На них перенесена значит. часть «одномерной» Э. т., но с ними связан и ряд новых проблем.

Простейшими примерами ДС могут служить каскад и поток, определяемые одной и той же ф-лой $T^t x = \mathrm{Fr}(x + t\alpha)$, где x — точка n-мерного единичного куба $X = K^n = [0,1)^n$, $n > 1$; α — векторный параметр, а $\mathrm{Fr}(x + t\alpha) = x + t\alpha - [x + t\alpha]$ — вектор, состоящий из дробных частей компонент вектора $x + t\alpha$ (из каждой компоненты $x_i + t\alpha_i$ вычтена её целая часть $[x_i + t\alpha_i]$). В качестве инвариантной меры берётся n-мерный объём (мера Лебега). Отождествляя K^n с n-мерным тором (при $n = 1$ — с окружностью), говорят, что ДС порождена сдвигами на торе (поворотами окружности). Траектории этой системы образуют обмотку тора (рис. 1, на к-ром $n = 2$), причём

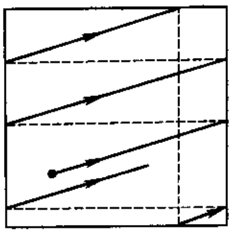

Рис. 1. Отрезок траектории обмотки двумерного тора.

либо все траектории замкнуты, либо все не замкнуты. Такая ДС возникает на каждом из инвариантных торов, на к-рые разбивается фазовое пространство гамильтоновой системы в случае, когда она вполне интегрируема.

Другая ДС (каскад) $\{T^t\}$ с тем же фазовым пространством определяется ф-лой $T^1 x = \mathrm{Fr}(Ax)$, где A — произвольная квадратная матрица n-го порядка с целочисленными элементами и определителем, равным ± 1 (условия, наложенные на A, гарантируют взаимную однозначность T^1 и инвариантность меры Лебега). Преобразование T^1 наз. автоморфизмом тора.

Ещё один пример: преобразование единичного квадрата $X = \{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$ с мерой Лебега, к-рое можно задать равенством

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} (2x_1, x_2/2), & x_1 \leqslant 1/2, \\ (2x_1 - 1, x_2/2 + 1/2), & x_1 > 1/2. \end{cases}$$

Его наз. преобразованием пекаря, что объясняется след. наглядной аналогией (рис. 2): прямоугольник

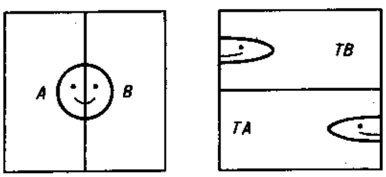

Рис. 2. Действие преобразования пекаря на левую и правую половину квадрата.

$A = \{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_1 \leqslant 1/2, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ (левая половина первоначального куска теста) вдвое сжимается в вертикальном направлении и вдвое растягивается (раскатывается) в горизонтальном. В результате он принимает вид TA. То же самое происходит и с прямоугольником B, но его нужно ещё сдвинуть, чтобы получить TB. Дальнейшие примеры ДС см. в последующих разделах статьи.

В Э. т. важную роль играет понятие изоморфизма ДС. Системы $\{T_1^t\}$ и $\{T_2^t\}$ изоморфны, если между их фазовыми пространствами (из к-рых, быть может, предварительно выброшено по множеству нулевой меры) можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее структуру этих пространств, т. е. переводящее измеримые множества в измеримые множества той же меры, а каждое преобразование T_1^t — в преобразование T_2^t. Изоморфизм сохраняет все свойства ДС, существенные для Э. т., и с общей точки зрения изоморфные системы следует считать лишь разл. представлениями одного и того же объекта.

В «общей» Э. т. можно выделить ряд направлений, занимающихся изучением тех или иных свойств ДС. Так, спектральная теория ДС применяет методы функционального анализа для изучения семейства *линейных операторов* $\{U^t\}$, порождённого ДС. Эти операторы действуют по ф-ле $(U^t f)(x) = f(T^t x)$ в *гильбертовом пространстве* $L^2 = L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, состоящем из комплекснозначных ф-ций $f(x)$, $x \in X$, с интегрируемым по мере μ квадратом модуля. Другое направление — энтропийная теория ДС — основано на тесной связи Э. т. с теорией вероятностей и на применении теоретико-вероятностных и теоретико-информац. идей. В «прикладной» Э. т. существуют разделы, в к-рых по преимуществу изучаются ДС, возникающие в теории вероятностей, дифференц. геометрии, теории чисел, статистич. физике и др. областях математики и физики (впрочем, мн. системы имеют «смешанное» происхождение, а вследствие изоморфизма само представление о происхождении ДС становится весьма условным).

Проблема инвариантной меры

В приведённом выше определении ДС инвариантная мера играет не меньшую роль, чем сама группа преобразований: замена меры может резко изменить свойства системы. Если задано лишь нек-рое семейство преобразований пространства X, то возникает вопрос о существовании хотя бы одной, прежде всего вероятностной, инвариантной меры. Иногда он решается относительно просто. Так, по теореме Крылова — Боголюбова всякое непрерывное преобразование компактного метрич. пространства обладает вероятностной инвариантной мерой, а по *Лиувилля теореме* мера Лебега (фазовый объём) инвариантна относительно любой гамильтоновой системы (хотя, в последнем случае мера всего пространства бесконечна, на гиперповерхности постоянной энергии может индуцироваться конечная мера). Иногда вероятностная инвариантная мера единственна. Это имеет место, напр., для каскада, порождённого поворотом окружности: $T^1 x = \mathrm{Fr}(x + \alpha)$, где α — иррациональное число. В др. случаях существует бесконечно много инвариантных вероятностных мер. Одна из проблем Э. т. — изучение инвариантных мер, принадлежащих какому-либо заранее выбранному классу. Пример такого класса — все инвариантные меры с фиксиров. совокупностью множеств меры 0 (такой же, как у заданной, не обязательно инвариантной меры); другой пример — инвариантные меры, удовлетворяющие вариационному принципу (см. ниже).

Классические эргодические теоремы и проблема эргодичности

Эргодич. теоремы описывают поведение временны́х средних физ. величин, т. е. ф-ций, определённых на фазовом пространстве $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ДС. Для каскада $\{T^t\}$ временно́е среднее A_t ф-ции $f(x)$, $x \in X$, на отрезке времени $[0, t]$ определяется равенством

$$(A_t f)(x) = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} f(T^s x),$$

а для потока

$$(A_t f)(x) = t^{-1} \int_0^t f(T^s x) ds.$$

Если f — индикатор нек-рого множества F, т. е. $f(x) = 1$ при $x \in F$ и $f(x) = 0$ при $x \notin F$, то $(A_t f)(x)$ есть не что иное, как доля времени, проведённого траекторией точки x в множестве F.