$$h \leqslant \int_X \sum_{i=1}^{k(x)} \chi_i(x) m_i(x) \mu(dx),$$

где $m_i(x)$ — кратность показателя $\chi_i(x)$ и $k(x)$ — число положит. показателей (показатели считаются занумерованными в порядке убывания). Для нек-рых инвариантных мер μ здесь достигается равенство, к-рое показывает, что энтропия характеризует степень неустойчивости траектории ДС. Оно служит важным инструментом оценки энтропии при численном исследовании ДС.

Кроме энтропии в Э. т. существует ещё одно понятие, близкое к ней по смыслу, но непосредственно не связанное с инвариантной мерой. Речь идёт о топологич. энтропии — числовой характеристике топологич. ДС. Такая система представляет собой группу или полугруппу непрерывных преобразований метрич. пространства X. Задав на X вероятностную меру μ, инвариантную относительно рассматриваемого семейства преобразований, получим ДС в смысле Э. т. Эта система имеет энтропию h_μ, зависящую, вообще говоря, от μ. Если фазовое пространство X компактно, то $\sup h_\mu$ по всем инвариантным мерам совпадает с топологич. энтропией h_{top}. Отсюда следует, что h_{top} является инвариантом непрерывного изоморфизма топологич. ДС: если между фазовыми пространствами двух таких систем имеется взаимно однозначное соответствие, при к-ром каждому борелевскому множеству в одном из них отвечает борелевское множество в другом, а преобразования, образующие ДС, переходят друг в друга, то эти системы имеют одинаковую топологич. энтропию. Мера μ, для к-рой $h_\mu = h_{top}$, наз. мерой с макс. энтропией. Такова, напр., мера Лебега для автоморфизма тора. Но меры с макс. энтропией может и не быть. Задача об условиях существования и свойствах таких мер служит одним из звеньев, связывающих Э. т. со статистич. физикой. Под влиянием последней в Э. т. в 70-х гг. появилось обобщение топологич. энтропии, называемое топологич. давлением (см. ниже).

Символическая динамика

Символической ДС наз. каскад $\{S^n\}$, образованный сдвигами в пространстве последовательностей. В простейшем случае фазовым пространством такой системы служит множество $A^{\infty}_{-\infty}$ всех последовательностей $y = \{y_i, -\infty < i < \infty\}$, элементы к-рых принадлежат нек-рому конечному или счётному множеству A («алфавиту»), а преобразование $S = S^1$ (сдвиг влево) переводит y в последовательность $y' = \{y'_i, -\infty < i < \infty\}$, где $y'_i = y_{i+1}$. В общем случае фазовым пространством символич. системы может быть не всё пространство последовательностей $A^{\infty}_{-\infty}$, а любое его подмножество Y, инвариантное относительно сдвига. Оно может иметь очень сложную структуру, но особенно важную роль играют относительно простые множества Y, наз. марковскими. Такое множество состоит из всех последовательностей, не содержащих ни одной пары стоящих рядом символов из заданного набора таких пар (напр., Y может состоять из всех последовательностей нулей и единиц, в к-рых две единицы нигде не стоят рядом). Семейство сдвигов $\{S^n\}$, определённое на марковском множестве, наз. символической (чаще топологической) цепью Маркова. Как правило, символич. система обладает бесконечным набором инвариантных вероятностных мер, но бывают множества Y (в т. ч. нетривиальные), для к-рых такая мера единственна. Всякая инвариантная вероятностная мера превращает последовательность координат y_i, рассматриваемых как ф-ции от y, в стационарную случайную последовательность со значениями в A.

Символич. системы играют в Э. т. двоякую роль. Во-первых, они используются для проверки тех или иных общих идей, во-вторых, составляют основу метода символич. динамики, позволяющего успешно изучать нек-рые классы ДС путём построения их символич. моделей. Суть этого метода, восходящего к Ж. Адамару (J. S. Hadamard), Биркгофу и М. Морсу (М. С. Morse), состоит в следующем. Пусть $\{T^n\}$ — каскад с фазовым пространством X и f — ф-ция на X со значениями в конечном или счётном множестве A. Тогда каждой точке $x \in X$ можно поставить в соответствие последовательность $y(x) = \{f(T^n x), -\infty < n < \infty\}$ элементов множества A. Очевидно, точке $T^1 x$ отвечает последовательность $S^1 y$, где S^1 — сдвиг на один символ влево, а множество Y_f всех полученных т. о. последовательностей инвариантно относительно S^1. Возникает символич. ДС, связанная с ф-цией f, точнее, с разбиением α_f пространства X на множества, где f принимает фиксиров. значения (изменение самих этих значений приводит к простой замене символов). Если μ — инвариантная мера системы $\{T^n\}$, то отображение, переводящее x в $y(x)$, индуцирует на Y_f меру μ_f по ф-ле $\mu_f(B) = \mu(\{x \in X: y(x) \in B\})$, к-рая инвариантна относительно $\{S^n\}$. Иногда удаётся подобрать f так, что с точностью до множества нулевой меры каждому $y \in Y_f$ отвечает только одно x, т. е. μ-почти всякая точка x однозначно определяется тем, какие элементы разбиения α_f она последовательно посещает под действием преобразований T^n. Тогда системы $\{T^n\}$ и $\{S^n\}$ оказываются изоморфными, а α_f наз. образующим разбиением или просто образующей для $\{T^n\}$. Всякий эргодич. каскад обладает счётной образующей, а при условии конечности его энтропии даже конечной.

Гиперболические системы

Понятие гиперболичности служит матем. выражением и конкретизацией свойства локальной неустойчивости траекторий. Обычно предполагается, что фазовым пространством системы служит нек-рое риманово *многообразие* (см. *Риманово пространство*) X, а динамика задаётся гладким отображением $T^1 = T: X \to X$ (случай каскада) или гладким векторным полем на X (случай потока). Наличие римановой структуры позволяет измерять длины кривых и объёмы подмножеств, принадлежащих X, а также длины векторов в касательных пространствах к X. Гиперболичность — это свойство отд. траекторий $O(x) = \{T^t x\}$, формулируемое в терминах касательных отображений (решений ур-ний в вариациях — в случае потока), отвечающих ДС $\{T^t\}$. Его смысл в том, что при каждом t имеется три типа поведения точек, бесконечно близких к точке $T^t x$: при своём дальнейшем движении под действием ДС точки первого типа с экспоненциальной скоростью сближаются с траекторией точки x, точки второго типа с экспоненциальной скоростью удаляются от неё, а точки третьего (нейтрального) типа ведут себя промежуточным образом. Этим трём типам поведения отвечает представление касательного пространства к X в точке $T^t x$ в виде прямой суммы подпространств, переходящих друг в друга вдоль траектории под действием касательных отображений. В случае каскада точек нейтрального типа может не быть совсем, а в случае потока они всегда есть — из таких точек состоит сама траектория $O(x)$. При изменении направления времени точки первого и второго типа меняются ролями, а точки третьего типа сохраняются.

Важнейшим инструментом исследования ДС гиперболич. типа служат устойчивые и неустойчивые многообразия. Устойчивое многообразие $W^s(x)$ точки x состоит из всех точек y, для к-рых расстояние между $T^t x$ и $T^t y$ стремится к нулю при $t \to \infty$, а неустойчивое многообразие $W^u(x)$ образовано точками y, к-рые ведут себя точно так же, но при $t \to -\infty$. Под действием T^t устойчивые многообразия переходят друг в друга: $T^t W^s(x) = W^s(T^t x)$, то же самое относится к неустойчивым многообразиям.

Наиб. полно свойство гиперболичности проявляется у систем Аносова, введённых Д. В. Аносовым в нач. 60-х гг. (первоначальное назв. — У-системы). У таких систем в случае дискретного времени отсутствуют точки нейтрального типа, а в случае непрерывного времени множество точек нейтрального типа для x исчерпывается траекторией $O(x)$. Кроме того, для систем Аносова константы, характеризующие экспоненциальное сближение траекто-